

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
U.F.R. DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE SYNTHÈSE
en vue de l'obtention de

l' HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées

présenté et soutenu publiquement par

Caroline Hillairet

le 25 novembre 2014

**Contribution aux risques d'information asymétrique,
de longévité et d'externalisation**

Jury :

M. Luciano Campi	London School of Economics
Mme Nicole El Karoui	Université Pierre et Marie Curie
Mme Monique Jeanblanc	Université d'Evry-Val-d'Essonne
M. Huyên Pham	Université Paris Diderot
Mme Monique Pontier	Institut de Mathématiques de Toulouse
M. Nizar Touzi	Ecole Polytechnique

au vue des rapports de

M. Luciano Campi	London School of Economics
Mme Monique Jeanblanc	Université d'Evry-Val-d'Essonne
M. Philip Protter	Columbia University

Remerciements

Je souhaite en premier lieu exprimer à Monique Pontier ma profonde gratitude. C'est grâce à elle que j'ai décidé de faire de la recherche ; sa bienveillance et ses conseils sont toujours d'une grande aide pour moi. Ce manuscrit doit beaucoup à deux autres personnalités féminines que j'apprécie beaucoup, et qui ont su m'apporter motivation et persévérance : Nicole El Karoui et Monique Jeanblanc. Je les remercie pour nos discussions enrichissantes et leurs conseils avisés. Je remercie aussi Nicole pour la confiance qu'elle m'a témoignée dès mon arrivée à l'Ecole Polytechnique.

Je remercie très sincèrement Luciano Campi, Monique Jeanblanc et Philip Protter qui m'ont fait le plaisir d'accepter de rapporter ce mémoire. Je leur suis très reconnaissante pour leur lecture attentive et leur intérêt pour mon travail. Toute ma gratitude va également à Nicole El Karoui, Monique Pontier, Huyen Pham et Nizar Touzi, qui me font l'honneur d'être membres de mon jury, en une période de l'année toujours très dense en événements de ce genre.

Merci à mes collaborateurs pour les discussions et pour les bons moments partagés, notamment Ying Jiao, Christophette Blanchet et Mohamed Mrad. Je remercie les membres du groupe de travail longévité, Stéphane Loisel, Yahia Salhi, Nicole El Karoui, Harry Bensusan, Isabelle Camilier pour nos séances de travail passionnantes à l'ILB. J'ai aussi eu beaucoup de plaisir à travailler avec Stefano De Marco, Benjamin Jourdain, Gilles-Edouard Espinosa. Merci à Cody Hyndman et Renjie Wang pour leur invitation et leur accueil à Montréal.

Tous mes remerciements vont aussi bien sûr à l'ensemble des membres du CMAP où j'ai toujours un grand plaisir à me rendre malgré des trajets en RER B parfois chaotiques. L'excellente ambiance qui y règne doit beaucoup à la formidable équipe administrative. Je pense particulièrement à Nasséra, à qui je souhaite plein de bonnes choses pour le futur, à Aldjia, et aussi à Alexandra, Nathalie, Sandra et Valérie qui veillent toujours sur moi avec beaucoup de bienveillance. Je souhaite remercier en particulier ma collègue de bureau Jocelyne Bion-Nadal ainsi que les chercheurs de l'équipe de finance : Emmanuel Bacry, Stefano De Marco, Emmanuel Gobet, Nizar Touzi. Sans oublier ceux qui sont partis vers d'autres horizons : Alexandre Popier, ainsi que Mathieu Rosenbaum et Peter Tankov que je remercie tout particulièrement pour leurs encouragements dans ce processus d'habilitation. Merci à Gilles Pagès de m'avoir permis de venir travailler au LPMA à Paris 6. Merci à Christelle Thomas et Cyril Armange de l'Institut Louis Bachelier pour leur

accueil chaleureux et leur aide précieuse lors d'organisation de conférences. Merci aux élèves de l'Ecole Polytechnique à qui j'ai toujours beaucoup de plaisir à enseigner.

Je souhaiterais dédier ce mémoire à mes deux petites princesses, Marie et Inès, qui me permettent de relativiser beaucoup de choses, ainsi qu'à leur papa, pour sa patience, sa compréhension et ses encouragements constants. Un grand merci aussi à ma famille pour son soutien constant et particulièrement à mes parents et beaux-parents qui ont la gentillesse de s'occuper de mes filles pour me permettre d'assister à des conférences.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction.....	1
1. Risque de défaut et Information asymétrique.....	7
1.1. Modélisation des différents niveaux d'information.....	8
1.2. Evaluation de dérivés de crédit avec information asymétrique.....	10
1.3. Evaluation avec information asymétrique.....	11
1.4. Optimisation de portefeuille d'un initié sur le risque de contrepartie	16
1.5. Perspectives.....	23
2. Risque de Longévité.....	27
2.1. Utilité Progressive et l'univers d'investissement.....	28
2.2. Règle de Ramsey et dynamique de la courbe des taux.....	34
2.3. Utilités puissances.....	38
2.4. Perspectives.....	45
3. Partenariat-Public-Privé et Externalisation de la dette.....	55
3.1. Formulation du problème.....	56
3.2. Réponse optimale de la firme J , situations 1 et 2.....	58
3.3. Equilibre de Nash	59
3.4. Equilibre de Stackelberg, firme I leader	62
3.5. Information incomplète	64
3.6. Perspectives.....	66
Bibliographie.....	69

INTRODUCTION

Ce dossier est une synthèse de mes travaux de recherche depuis la soutenance de ma thèse doctorale. Ces travaux s'articulent selon trois thèmes, que je décris brièvement ci-dessous. Ces sujets sont issus de motivations rattachées aux domaines de la finance, de l'assurance ou de l'économie. L'étude de ces problèmes fait intervenir des outils mathématiques et probabilistes variés, comme par exemple des outils de grossissements de filtrations, des techniques d'optimisation reposant sur des méthodes de dualité, du contrôle stochastique, des méthodes de programmation dynamique et de la théorie des jeux.

Risque de défaut et information asymétrique

Il existe principalement deux approches dans la littérature pour la modélisation d'un événement de défaut : l'approche structurelle et l'approche forme réduite. Dans l'approche structurelle (cf Merton [63]), le défaut survient lorsque un processus fondamental X (par exemple la valeur de la firme) passe au dessous d'un certain niveau L . En général L est constant ou déterministe et L est fixé par les *managers* de la firme selon certains critères, afin par exemple de maximiser la valeur *equity* (cf Leland [62]). Dans l'approche forme réduite, qui repose sur la notion d'intensité de défaut, le défaut est moins "prévisible". Une information partielle sur X ou L permet de faire un lien entre ces deux approches. Je me suis particulièrement intéressée au cas où L est une variable aléatoire fixée par le *manager* : en effet, lorsque le manager décide que la firme fait défaut ou non, il a une information supplémentaire sur L par rapport à un investisseur standard.

Mes travaux portent sur l'impact de l'information, notamment sur la barrière de défaut L , dans différentes problématiques : *pricing* de produits

dérivés de crédit et optimisation de portefeuille dans un marché soumis au risque de contrepartie. Contrairement à Giesecke et Goldberg dans [31] et [32] où les investisseurs anticipent la loi L , l'information privée que je considère ne concerne pas la loi de L mais la réalisation de L . La modélisation mathématique repose donc sur des outils de grossissement de filtrations, développés dans les travaux des années 1970-1980 de Jeulin, Jacod, Yor [55, 56, 52].

L'idée usuelle en risque de crédit est d'établir des relations entre la filtration globale du marché et la filtration de référence sans défaut, l'avantage étant qu'il est souvent plus facile de travailler dans la filtration sans défaut qui vérifie des conditions de régularité plus agréables. Dans cet esprit, dans [45] et [46] on s'intéresse au calcul de probabilités conditionnelles de survie et au *pricing* de dérivés de crédit, en prenant en compte différents niveaux d'information. Pour chaque information, on établit une formule de *pricing* relatif à la filtration de référence sans défaut. Puis dans [47], dans ce même cadre de modélisation de l'information, on étudie le problème d'optimisation de portefeuille pour un initié ainsi que la valeur de l'information privée. C'est un problème classique (cf Karatzas et al. [61]) où l'initié choisit son portefeuille afin de maximiser l'utilité terminale de sa richesse. Amendinger et al. [2] se posent la question du coût d'une information privée, d'un point de vue prix d'indifférence. Dans [2] l'information privée est une fonctionnelle de la valeur terminale d'un actif, perturbée par un bruit. L'originalité de [47] est d'étudier ce problème d'investissement optimal pour un initié dans un contexte avec défaut, en considérant un marché dont les actifs risqués peuvent subir une perte au moment du défaut d'une contrepartie. [47] compare la stratégie d'un initié, dont l'information privée concerne le risque de défaut de la contrepartie, à celle d'un investisseur standard qui a été étudiée par Jiao et Pham dans [57]. La décomposition canonique de stratégies adaptées par rapport à l'information de l'initié conduit naturellement à décomposer le problème sur l'ensemble avant le défaut τ (avant τ les stratégies dépendent de L), et après le défaut (les stratégies dépendent alors de τ). Après τ la résolution repose sur des méthodes de dualité, et avant τ sur une approche programmation dynamique. Une comparaison numérique des stratégies est menée.

Risque de longévité et règle de Ramsey avec utilité progressive pour la modélisation des taux d'intérêt long terme

Le risque de longévité est le "risque" que les assurés vivent plus longtemps que prévu. Associer le mot "risque" avec longévité peut sembler paradoxal. Mais l'allongement régulier de la durée de vie en Europe et aux Etats-Unis depuis 1960 pose évidemment des problèmes aux organismes ou institutions qui se sont engagés à verser des rentes (retraites, retraites complémentaires, autres rentes viagères, etc...). Comprendre et gérer le risque de longévité n'est pas une chose aisée car ce domaine de recherche est au centre de nombreux autres : probabilités, statistiques, assurance-vie, démographie, médecine, finance... Cet axe de recherche a été initié par Nicole El Karoui et Stéphane Loisel dans le cadre de la chaire "Dérivés du Futur" de la Fédération Bancaire Française. Une petite équipe, composée de quelques doctorants, de Pauline Barrieu et moi même s'est vite montée autour d'eux et nous a permis de réfléchir à ces enjeux et ces problématiques complexes et variées et à échanger en profitant de la culture scientifique de chacun. Le fruit de ces réflexions a donné lieu à un travail collectif de synthèse [5] où nous avons tenté de faire le point et de proposer des idées sur les types de modélisations du risque de longévité, les questions réglementaires, ainsi que les problématiques relatives au transfert du risque, à l'évaluation et à la couverture de ces produits. Nous poursuivons désormais cette thématique dans le cadre de l'ANR Lolita (Dynamic models for human Longevity with Lifestyle Adjustments). Depuis ce travail de synthèse [5], tout en suivant avec intérêt les avancements des différents projets de recherche initiés sur la longévité, je me suis plus particulièrement concentrée sur la modélisation de taux d'intérêt long terme.

La modélisation des taux d'intérêt long terme est un enjeu important pour le financement de projets écologiques ou l'évaluation de produits financiers de longévité. Malheureusement les marchés financiers ne peuvent nous donner de réponses satisfaisantes pour de longues maturités (30 ans et plus) car le marché des zéros-coupons est alors très illiquide et les modèles classiques de finance de taux d'intérêt ne peuvent être étendus de façon satisfaisante pour de telles maturités. Notre idée fut donc de se tourner vers la littérature économique qui est très abondante sur tout ce qui concerne les aspects économiques de décisions long-terme. Le calcul économique repose sur l'utilisation d'un taux d'actualisation qui permet d'évaluer la valeur future d'un investissement en le ramenant à un équivalent actuel. Le taux d'actualisation est ainsi un point de passage obligé pour clarifier les enjeux de la décision sur le très long terme. La règle de Ramsey, introduite par Ramsey dans son article précurseur [75] (1928) et longuement débattue ensuite par de nombreux économistes comme

Gollier [35, 34, 38, 37, 39, 36] ou Weitzman [78], est l'équation de référence pour calculer le taux d'actualisation. La règle de Ramsey donne un lien à l'équilibre entre taux d'actualisation et utilité marginale de la consommation agrégée de l'économie. Bien que cette règle soit très simple, il n'existe pas de consensus parmi les économistes sur les valeurs numériques des paramètres, ce qui conduit à des taux d'actualisation très différents les uns des autres. Néanmoins, comme l'ont souligné Lecocq et Hourcade [49], les économistes s'accordent sur la nécessité d'un schéma de décision séquentielle permettant de réviser les premières décisions en fonction de l'évolution des connaissances et de l'expérience : le critère d'utilité doit donc être adaptatif et doit s'ajuster au flux d'information. Dans le langage de l'optimisation, ce critère adaptatif est appelé *consistance*. En ce sens, les utilités progressives consistantes, étudiées par El Karoui et Mrad [22], sont les outils stochastiques adéquats pour étudier les taux d'intérêt long terme.

En effet, dans un environnement dynamique et stochastique, les fonctions d'utilité "classiques" ne sont pas assez flexibles pour permettre de faire des choix pertinents à long terme. M. Musiela et T. Zariphopoulou (2003-2008 [71, 70]) furent les premiers à suggérer d'utiliser le concept d'utilité progressive dynamique, consistante avec un univers d'investissement donné. Ce concept d'utilité progressive propose ainsi une façon adaptative de modéliser les éventuels changements des préférences des agents au cours du temps. Motivée par la règle de Ramsey (pour laquelle la consommation joue un rôle central), [24] étend la notion d'utilité progressive consistante à un cadre avec consommation où les agents investissent dans un marché financier et peuvent consommer une part de leur richesse à chaque instant. La fonction valeur d'un problème d'optimisation classique (sous des hypothèses de régularité) est un exemple d'utilité progressive. Néanmoins, dans le cadre classique, le problème est posé très différemment : dans l'approche classique, les processus optimaux sont obtenus par une analyse rétrograde, soulignant leur dépendance en l'horizon du problème d'optimisation, alors que le point de vue progressif souligne la monotonie des processus optimaux en leur condition initiale. Les utilités progressives conduisant à des processus optimaux linéaires en leur condition initiale (comme c'est le cas pour les utilités puissances très utilisées en économie) permettent d'aboutir à des calculs explicites.

Pour une modélisation financière, il est naturel d'établir des relations entre courbe de taux et zéro-coupon. Le marché des zéro-coupons étant très illiquide pour de longues maturités, nous avons utilisé, pour des transactions

à faibles nominaux, le prix d'indifférence d'utilité marginale (aussi appelé prix de Davis). Ainsi nous avons montré que, d'après la règle de Ramsey, les taux d'intérêt à l'équilibre économique et les taux d'intérêt d'utilité marginale coïncident. Nous avons plus particulièrement étudié cette courbe de taux pour les utilités puissances (rétrogrades et progressives) dans un modèle log-normal dans [24] puis dans un modèle à facteurs affine dans [23].

Contrat Partenariat-Public-Privé et Externalisation de la dette

Avec l'augmentation ces dernières années de la dette publique de nombreux pays développés, ainsi que l'éventualité que certains d'entre eux puissent faire défaut, la question du financement de projets publics est au centre des préoccupations économiques et politiques. Se reporter au secteur privé peut ainsi paraître une idée séduisante au premier abord. Ces contrats Partenariat-Public-Privé (PPP) sont d'abord apparus au Royaume Uni en 1992 (sous le nom de Private Financing Initiative) et représentent un tiers des investissements publics de ce pays sur la période 2001-2006. Ces contrats sont aussi utilisés par exemple au Canada, USA, et en France, pour financer des hôpitaux, prisons ...(cf [28] et [72]) La littérature économique s'est penché sur le sujet. Par exemple Iossa, Martimort and Pouyet [50] comparent, dans une modélisation relativement minimaliste, les coûts et bénéfices associés aux PPP. Dans [3], Auriol et Picard discutent de l'opportunité de contrats Build-Operate-Transfer (une variante de PPP) en supposant que le public n'a pas la même information que l'opérateur privé sur les paramètres des coûts du projet. Notre approche est différente tant du point de vue modélisation que résolution.

On propose dans [48] une étude des PPP et de leur pertinence, en prenant en compte l'éventualité de défaut de la contrepartie. Si on inclut le risque de faillite, externaliser ne peut être intéressant que lorsque une pénalité est imposée à l'opérateur privé en cas de faillite et dans un certain contexte : risque ou coût de référence élevés, échéance courte, pénalité suffisante eu égard à la dette. De fait, cela correspond à un transfert de risque du public vers le privé.

Néanmoins, même si les PPP présentent des avantages, il reste encore beaucoup d'interrogations sur ses inconvénients. En particulier, on s'intéresse dans [29] à la question suivante : d'un point de vue économique, et prenant en compte les contraintes auxquelles font face les pays lorsqu'ils émettent de la dette, est-il optimal de faire financer un projet public par un investissement privé? Cette question ne se limite pas à l'émission d'une dette par un pays,

et se généralise à un agent économique ou une entreprise, dont la banque ne voudrait pas prêter une trop grosse somme d'argent, ou qui craindrait que trop de dettes n'affectent la confiance des investisseurs. Dans [29] on considère donc le problème d'externalisation d'un point de vue de la dette, la maintenance étant externalisée dans les deux situations (externalisation de l'investissement ou émission de dette). On étudie les équilibres de Nash et de Stackelberg pour des fonctions d'utilités puissances, puis on discute l'impact d'une incertitude sur le paramètre d'aversion au risque de la firme auprès de laquelle on externalise.

Ce mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches se base sur les publications et prépublications suivantes.

Publications après la thèse

- [H4] C. Hillairet, Y. Jiao. Information asymmetry in *pricing* of credit derivatives, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* Vol. 14, No. 5, 611-633, 2011.
- [H5] C. Hillairet, Y. Jiao. Credit risk with asymmetric information on the default threshold, *Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, Vol. 84, Nos. 2-3, 183-198, 2012.
- [H6] P. Barrieu, C. Hillairet, H. Bensusan, N. El Karoui, S. Loisel, C. Ravanelli, Y. Salhi. Understanding, modeling and managing longevity risk : key issues and main challenges, *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2012, No 3, 203-231, 2012.
- [H7] C. Hillairet, M. Pontier. A modelisation of public private partnerships with failure time, *Stochastic Analysis and Related Topics*, Laurent Decreusefond and Jamal Najim ed. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics* Vol 22, 91-117, 2012.
- [H8] C. Hillairet, Y. Jiao. Portfolio optimization with insider's initial information and counterparty risk, à paraître dans *Finance and Stochastics*, 2014.
- [H9] C. Hillairet. A portfolio optimization problem with two prices generated by two information flows, *Arbitrage, Credit and Informational Risks. Proceedings of the Sino-French Research Program in Financial Mathematics Conference*, Beijing June 2013, 2014.
- [H10] N. El Karoui, C. Hillairet, M. Mrad. Affine long term yield curves : an application of the Ramsey rule with progressive utility, *Journal of Financial Engineering*, Vol.1, No.1, 2014 DOI : 10.1142/S2345768614500032.

Prépublications

- [H11] G.E. Espinosa, C. Hillairet, B. Jourdain, M. Pontier. Reducing the debt : is it optimal to outsource an investment ? (2013), *Soumis* .
- [H12] S. De Marco, C. Hillairet, A. Jacquier. Shapes of implied volatility with positive mass at zero, (2013), *Soumis* .
- [H13] N. El Karoui, C. Hillairet, M. Mrad. Ramsey rule with progressive utility : a theoretical framework for long term yield curves modeling, (2014), *Soumis* .

[H14] I. Camilier, N. El Karoui, C. Hillairet. The \mathbb{G} -market : a new point of view on consumption. *En préparation*

CHAPITRE 1

RISQUE DE DÉFAUT ET INFORMATION ASYMÉTRIQUE

La quantification des risques financiers, ainsi que l'élaboration de stratégies destinées à les couvrir par un investisseur donné, dépendent fortement de sa perception du risque, ou plus précisément de l'information dont il dispose pour l'évaluer. L'information représente ainsi un élément clé de la modélisation financière. Dans la plupart des modèles financiers, l'information est supposée commune et donnée à l'avance.

En dehors des travaux portant sur les agents initiés (Gorod et Pontier [40], Amendinger et al. [2], Hillairet [44], Elliott et Jeanblanc [27]) et des modèles d'équilibre type Kyle et Back (Cho [15], Kyle [42], Back [8]), peu d'études ont été conduites pour étudier l'influence de l'information sur l'évaluation des produits financiers.

Dans nos travaux sur le rôle de l'information, l'information est modélisée par une filtration et nous utilisons la théorie de grossissement de filtration (Jeulin, Yor, Jacod [56, 55, 52]...). Lors de ma thèse, j'ai principalement étudié le cas d'une information privée concernant une information spécifique sur les prix cotés du marché (par exemple la réalisation dans le futur d'une fonctionnelle des prix). Depuis, dans une série de travaux en collaboration avec Jiao [45, 46, 47] nous avons étudié le cas d'une information asymétrique concernant un risque de défaut ou un risque de contrepartie. Inspirées par les modèles structurels, nous modélisons le temps de défaut τ comme le premier temps de passage d'un processus stochastique (représentant typiquement la valeur de la firme) à une barrière aléatoire L . Nous considérons différents niveaux d'information sur cette barrière aléatoire L et nous étudions l'impact de ces informations sur la gestion du risque de défaut : tout d'abord sur

l'évaluation des produits dérivés de crédit, puis sur les stratégies d'optimisation de portefeuille.

La première étape consiste à comparer les probabilités de défaut en fonction des différents niveaux d'information, ainsi que les prix des produits dérivés de crédit correspondants. Puis, dans un marché avec risque de contrepartie où le défaut peut induire une perte brutale du portefeuille d'investissement, nous étudions les stratégies optimales d'investissement pour un initié et la comparons à celle d'un investisseur standard.

Dans la suite, on considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ engendrée par un mouvement brownien $(W_t)_{t \geq 0}$. Soit X un processus aléatoire continu \mathbb{F} -adapté (représentant la valeur ou la santé financière de la firme), et X^* son minimum courant $X_t^* = \inf\{X_s, s \leq t\}$. Le temps de défaut τ est alors défini comme

$$(1.1) \quad \tau = \inf\{t : X_t \leq L\} \quad \text{avec } X_0 > L$$

où L est une variable aléatoire positive. Dans le cas particulier où L est indépendante de \mathbb{F} et suit une loi exponentielle, cette modélisation (1.1) correspond au modèle de Cox. Ce modèle est largement utilisé dans la pratique. Dans notre approche, la barrière aléatoire L n'est pas nécessairement indépendante de \mathbb{F} et nous verrons que la loi conditionnelle de L par rapport à l'information \mathbb{F} est prépondérante.

1.1. Modélisation des différents niveaux d'information

Les investisseurs ont différents niveaux d'information sur les actifs du marché et sur le défaut. Leur information respective est modélisée par des filtrations différentes \mathbb{H} que l'on spécifie ci-dessous. Toutes les filtrations considérées sont régularisées de façon à vérifier les conditions usuelles (notamment continue à droite).

1. *Information d'un investisseur standard.* Un investisseur standard sur le marché observe \mathbb{F} ainsi que la réalisation du défaut lorsque celui-ci a lieu. Son information est donc modélisée par le grossissement progressif de \mathbb{F} par le temps aléatoire τ

$$\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0} = (\mathcal{F}_t \vee \mathcal{D}_t)_{t \geq 0}$$

avec $\mathbb{D} = (\mathcal{D}_t)_{t \geq 0}$ l'information du défaut, i.e., la plus petite filtration pour laquelle τ est un temps d'arrêt ($\mathcal{D}_t = \mathcal{D}_{t+}^0$ avec $\mathcal{D}_t^0 = \sigma(\tau \wedge t)$).

2. *Information parfaite d'un initié.* Un initié parfaitement informé (par exemple le *manager* de l'entreprise) connaît la barrière L et observe \mathbb{F} . Son information est donc modélisée par le grossissement initial de \mathbb{F} par la variable aléatoire L

$$\mathbb{G}^M = (\mathcal{G}_t^M)_{t \geq 0} := (\mathcal{F}_t \vee \sigma(L))_{t \geq 0}.$$

3. *Information bruitée d'un initié.* On considère un initié qui possède une observation bruitée $(L_t = f(L, \epsilon_t))_{t \geq 0}$ de la barrière L , $(\epsilon_t)_{t \geq 0}$ étant un bruit indépendant. Il observe en outre le défaut. Son information est donc modélisée par la filtration

$$\mathbb{G}^I = (\mathcal{G}_t^I)_{t \geq 0} := (\mathcal{F}_t \vee \sigma(L_s, s \leq t) \vee \mathcal{D}_t)_{t \geq 0}.$$

4. *Information avec retard.* Certains investisseurs n'observent pas les informations du marché en temps réel mais avec un délai $\delta(t)$, où δ est une fonction telle que $t \rightarrow t - \delta(t)$ est croissante et positive. Ils observent de plus la réalisation du défaut (sans retard). Leur information est donc modélisée par le grossissement progressif de $\mathbb{F}^{\mathbb{D}} = (\mathcal{F}_{t-\delta(t)})_{t \geq 0}$ par le temps aléatoire τ

$$\mathbb{G}^D = (\mathcal{G}_t^D)_{t \geq 0} := (\mathcal{F}_{t-\delta(t)} \vee \mathcal{D}_t)_{t \geq 0}$$

D'un point de vue information pertinente, nous avons la relation ⁽¹⁾

$$\mathbb{G}^D \prec \mathbb{G} \prec \mathbb{G}^I \prec \mathbb{G}^M.$$

Afin d'éviter l'existence d'arbitrages pour les initiés, on travaille sous l'hypothèse de Jacod, classique dans la théorie de grossissement initial de filtrations :

Hypothèse (HM). — L est une variable aléatoire \mathcal{A} -mesurable telle que

$$\mathbb{P}(L \in \cdot | \mathcal{F}_t)(\omega) \sim \mathbb{P}(L \in \cdot), \quad \forall t \geq 0, \mathbb{P} - p.s..$$

D'après Jacod [52], il existe une version mesurable de la densité conditionnelle

1. D'un point de vue inclusion de filtration, $\mathbb{G}^D \subseteq \mathbb{G} \subseteq \mathbb{G}^M$ et $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{G}^I$ mais $\mathbb{G}^I \not\subseteq \mathbb{G}^M$ car le bruit $(\epsilon_s) \not\subseteq \mathbb{G}^M$.

$$(1.2) \quad p_t(x)(\omega) = \frac{dP_t^L}{dP^L}(\omega, x)$$

avec $P_t^L(\omega, x)$ une version régulière de la loi conditionnelle de L sachant \mathcal{F}_t et P^L la loi de L (sous \mathbb{P}). D'après Ghorud and Pontier [40], l'hypothèse (HM) est équivalente à l'existence d'une mesure de probabilité \mathbb{P}^L , équivalente à \mathbb{P} , sous laquelle \mathbb{F} et $\sigma(L)$ sont indépendantes, et qui est unique si on impose qu'elle coïncide avec \mathbb{P} sur \mathcal{F}_∞ et sur $\sigma(L)$. Plus précisément, \mathbb{P}^L est définie par $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^L} \left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^L} \middle| \mathcal{G}_t^M \right] = p_t(L)$. L'existence de cette probabilité \mathbb{P}^L joue un rôle clé dans nos résultats.

Pour l'information bruitée nous travaillons sous l'hypothèse supplémentaire concernant le bruit :

Hypothèse (HI). — On suppose que $L_t = L + \epsilon_t$, $(\epsilon_t)_t$ étant un processus continu indépendant de \mathbb{F} et de L et dont les accroissements rétrogrades sont indépendants (i.e. pour $0 \leq s \leq t \leq \theta$, $\epsilon_s - \epsilon_t$ est indépendant de ϵ_θ). On suppose que la loi marginale de ϵ_t a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, notée q_t .

On récapitule les notations qui vont nous servir par la suite

Notations

$$\begin{aligned} P^L(x) &: \text{loi de } L \\ P_t^L(\omega, x) &: \text{loi conditionnelle de } L \text{ sachant } \mathcal{F}_t \\ p_t(x)(\omega) &= \frac{dP_t^L}{dP^L}(\omega, x) \\ p_t(L) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^L} \left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^L} \middle| \mathcal{G}_t^M \right] \\ L_t &= L + \epsilon_t, q_t \text{ densité marginale de } \epsilon_t. \end{aligned}$$

1.2. Evaluation de dérivés de crédit avec information asymétrique

Il s'agit d'estimer tout d'abord les probabilités des événements de défaut (ou de façon équivalente des événements de survie) en fonction des niveaux d'information.

1.2.1. Probabilités de défaut. — Soit $T > 0$ une maturité. Pour $t \leq \theta \leq T$, on calcule $\mathbb{P}(\tau > \theta | \mathcal{H}_t)$ la probabilité conditionnelle de l'événement de survie $\{\tau > \theta\}$ par rapport à \mathcal{H}_t l'information disponible en t . Les résultats sont standards pour les grossissements progressifs \mathbb{G} et \mathbb{G}^D . Pour le grossissement

des initiés \mathbb{G}^M et \mathbb{G}^I , l'astuce de [45] est de travailler sous \mathbb{P}^L en effectuant un changement de probabilité.

1. *Investisseur standard.* Pour $\mathbb{H} = \mathbb{G}$

$$\mathbb{P}(\tau > \theta | \mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\tau > t} \frac{\mathbb{E}(P_\theta^L(X_\theta^*) | \mathcal{F}_t)}{P_t^L(X_t^*)}.$$

2. *Information parfaite d'un initié.* Pour $\mathbb{H} = \mathbb{G}^M$ et sous l'hypothèse (HM)

$$\mathbb{P}(\tau > \theta | \mathcal{G}_t^M) = \frac{1}{p_t(L)} [E_{\mathbb{P}}(p_\theta(x) \mathbf{1}_{X_\theta^* > x} | \mathcal{F}_t)]_{x=L}$$

3. *Information bruitée d'un initié.* Pour $\mathbb{H} = \mathbb{G}^I$ et sous l'hypothèse (HI)

$$\mathbb{P}(\tau > \theta | \mathcal{G}_t^I) = \mathbf{1}_{\tau > t} \frac{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p_t(l)} E_{\mathbb{P}}(p_\theta(l) \mathbf{1}_{X_\theta^* > l} | \mathcal{F}_t) q_{T-t}(L_t - l) P_t^L(dl)}{\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{X_t^* > l} q_{T-t}(L_t - l) P_t^L(dl)}$$

4. *Information avec retard.* Pour $\mathbb{H} = \mathbb{G}^D$

$$\mathbb{P}(\tau > \theta | \mathcal{G}_t^D) = \mathbf{1}_{\tau > t} \frac{\mathbb{E}(P_\theta^L(X_\theta^*) | \mathcal{F}_t^D)}{\mathbb{E}(P_t^L(X_t^*) | \mathcal{F}_t^D)}.$$

1.3. Evaluation avec information asymétrique

Suivant Bielecki et Rutkowski [10], un produit dérivé de maturité T soumis au risque de crédit est décrit par un triplet (C, G, Z) , où C est une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable représentant le paiement à maturité s'il n'y a pas eu défaut, G est un processus (paiements des dividendes) \mathbb{F} -adapté, de variation finie vérifiant $G_0 = 0$, et Z est un processus \mathbb{F} -prévisible dont la valeur en τ représente le taux de recouvrement. La valeur en $t < \tau \wedge T$ de ce produit dérivé de crédit, en fonction du niveau d'information \mathbb{H} et de la probabilité de pricing \mathbb{Q} (qui sera précisée, selon le niveau d'information, en sous-section 1.3.2) est donnée par

$$(1.3) \quad V_t^{\mathbb{Q}, \mathbb{H}} = R_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[C R_T^{-1} \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} + \int_t^T \mathbf{1}_{\{\tau > u\}} R_u^{-1} dG_u + Z_\tau \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} R_\tau^{-1} \mid \mathcal{H}_t \right]$$

où $(R_t)_t$ est le processus d'actualisation \mathbb{F} -adapté.

Notre but est d'établir une formule de prix par rapport à la filtration de référence sans défaut \mathbb{F} , pour chacun des niveaux d'information. Dans un premier temps nous nous concentrons sur l'impact de l'information sur la filtration (en faisant l'évaluation sous la probabilité historique \mathbb{P}) puis dans un deuxième temps nous étudierons l'impact sur la probabilité de pricing.

1.3.1. Evaluation sous la probabilité historique \mathbb{P} . —

1.3.1.1. *Information standard et avec retard.* — L'évaluation pour l'information standard $\mathbb{H} = \mathbb{G}$ est un résultat bien connu de la littérature [9, 10] qui repose sur la théorie du grossissement progressif de filtrations ([55, 56]). Soit S^F le processus de survie (aussi appelé surmartingale d'Azéma) de τ

$$S_t^F := \mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_t^* > L | \mathcal{F}_t)$$

Proposition 1.3.1. — *Le processus valeur du produit financier (C, G, Z) sous la probabilité \mathbb{P} relativement à la filtration standard \mathbb{G} est*

$$(1.4) \quad V_t^{\mathbb{P}, \mathbb{G}} = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{R_t}{S_t^F} E_{\mathbb{P}} \left[R_T^{-1} S_T^F C + \int_t^T R_u^{-1} S_u^F dG_u - \int_t^T R_u^{-1} Z_u dS_u^F \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

L'évaluation pour l'information avec retard $\mathbb{H} = \mathbb{G}^{\mathbb{D}}$ est tout à fait similaire, la seule différence venant du fait que les processus de survie S^F et d'actualisation R ne sont pas $\mathbb{F}^{\mathbb{D}}$ -adaptés.

Proposition 1.3.2. — *Le processus valeur du produit financier (C, G, Z) sous la probabilité \mathbb{P} relativement à la filtration avec retard $\mathbb{G}^{\mathbb{D}}$ est*

$$(1.5) \quad V_t^{\mathbb{P}, \mathbb{G}^{\mathbb{D}}} = \frac{\mathbf{1}_{\{\tau > t\}}}{\mathbb{E}[S_t^F | \mathcal{F}_t^{\mathbb{D}}]} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{R_t}{R_T} S_T^F C + \int_t^T \frac{R_t}{R_u} S_u^F dG_u - \int_t^T \frac{R_t}{R_u} Z_u dS_u^F \middle| \mathcal{F}_t^{\mathbb{D}} \right].$$

1.3.1.2. *Information parfaite d'un initié.* — Pour $\mathbb{H} = \mathbb{G}^M$ et sous l'hypothèse (HM), la clé de la démonstration proposée dans [45, 46] est de travailler sous la probabilité \mathbb{P}^L et d'introduire le processus $F_t^M(x) := p_t(x) \mathbf{1}_{\{X_t^* > x\}}$ qui joue un rôle similaire au processus de survie S^F .

Proposition 1.3.3. — *Le processus valeur du produit financier (C, G, Z) sous la probabilité \mathbb{P} relativement à la filtration du manager \mathbb{G}^M est*

$$(1.6) \quad V_t^{\mathbb{P}, \mathbb{G}^M} = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{V_t^{\mathbb{F}}(L)}{p_t(L)}$$

avec $F_t^M(x) = p_t(x) \mathbf{1}_{\{X_t^* > x\}}$ et

$$V_t^{\mathbb{F}}(x) = R_t E_{\mathbb{P}} \left[C R_T^{-1} F_T^M(x) + \int_t^T F_s^M(x) R_s^{-1} dG_s - \int_t^T Z_s R_s^{-1} dF_s^M(x) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

1.3.1.3. Information bruitée d'un initié. — Pour $\mathbb{H} = \mathbb{G}^I$ et sous l'hypothèse (HI), la clé de la démonstration est d'introduire la filtration auxiliaire $\mathbb{F}^I = (\mathcal{F}_t^I)_{t \geq 0} := (\mathcal{F}_t \vee \sigma(L_s, s \leq t))_{t \geq 0}$ et de remarquer que \mathbb{G}^I est le grossissement progressif de \mathbb{F}^I . On établit dans un premier temps une formule de prix pour la filtration \mathbb{F}^I

$$(1.7) \quad \frac{\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} R_t}{S_t^I} E_{\mathbb{P}} \left[R_T^{-1} S_T^I C + \int_t^T R_u^{-1} S_u^I dG_u - \int_t^T R_u^{-1} Z_u dS_u^I \middle| \mathcal{F}_t^I \right]$$

où $S_t^I := \mathbb{P}(\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} | \mathcal{F}_t^I)$. Sous l'hypothèse (HI), S_t^I s'écrit comme $S_t^I(L_t)$, avec $S_t^I(\cdot)$ la fonction $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mesurable $S_t^I(x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{X_t^* > l\}} p_t(l) q_t(x-l) P^L(dl)}{\int_{\mathbb{R}} p_t(l) q_t(x-l) P^L(dl)}$. On utilise alors dans un deuxième temps un résultat analogue à la Proposition 1.3.1 concernant le grossissement progressif pour aboutir à l'expression suivante :

Proposition 1.3.4. — *Le processus valeur du produit financier (C, G, Z) sous la probabilité \mathbb{P} relativement à la filtration bruitée d'un initié \mathbb{G}^I est*

$$(1.8) \quad V_t^{\mathbb{P}, \mathbb{G}^I} = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\int_{\mathbb{R}} V_t^{\mathbb{F}}(l) q_t(L_t - l) P^L(dl)}{\int_{\mathbb{R}} F_t^M(l) q_t(L_t - l) P^L(dl)}$$

où $V^{\mathbb{F}}$ et F^M sont définis dans la Proposition 1.3.3.

1.3.2. Evaluation sous probabilité risque-neutre. — Pour évaluer un dérivé de crédit, le niveau d'information impacte à la fois la filtration (comme nous l'avons étudié dans la section précédente) mais aussi la probabilité de pricing. Nous nous concentrons ici sur ce deuxième aspect. Puisque nous nous concentrons sur le changement de probabilité dû aux différentes sources d'information, on suppose que \mathbb{P} est la probabilité risque-neutre du marché "sans défaut" décrit par la filtration \mathbb{F} .

Le but est de déterminer les probabilités risque-neutre pour la filtration des initiés, parfaite \mathbb{G}^M et bruitée \mathbb{G}^I , et de discuter les évaluations correspondantes du produit dérivé de crédit (C, G, Z) .

Pour le cas du manager, la seule probabilité risque-neutre pour la filtration \mathbb{G}^M est la probabilité \mathbb{P}^L puisque c'est l'unique mesure de probabilité \mathbb{Q}^M équivalente à \mathbb{P} qui coïncide sur \mathbb{F} avec \mathbb{P} et telle que toute (\mathbb{F}, \mathbb{P}) -martingale locale est une $(\mathbb{G}^M, \mathbb{Q}^M)$ -martingale locale.

Pour le cas d'une information privée bruitée, la probabilité risque-neutre \mathbb{Q}^I pour la filtration \mathbb{G}^I est définie par la densité $\frac{d\mathbb{Q}^I}{d\mathbb{Q}} = Y^I = \mathcal{E}(-\int_0^t \rho_s^I (dW_s - \rho_s^I ds))$ (où \mathcal{E} est la martingale exponentielle). Le drift d'information ρ^I pour l'information bruitée est la projection du drift d'information

ρ^M pour l'information parfaite : $\rho_t^I := E_{\mathbb{P}}[\rho_t^M(L)|\mathcal{F}_t^I]$, avec ρ^M défini par $dp_t(L) = p_t(L)\rho_t^M(L)dW_s$. (cf. Corcuera et al. [17])

Proposition 1.3.5. — 1) *Information parfaite de l'initié.* On suppose l'hypothèse (HM). Soit $F_t^{\mathbb{Q}^M}(l) = \mathbf{1}_{\{X_t^* > l\}}$. Le processus valeur du produit financier (C, G, Z) sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q}^M pour la filtration \mathbb{G}^M est

$$V_t^{\mathbb{G}^M, \mathbb{Q}^M} = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} R_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[C R_T^{-1} F_T^{\mathbb{Q}^M}(x) + \int_t^T F_s^{\mathbb{Q}^M}(x) R_s^{-1} dG_s - \int_t^T Z_s R_s^{-1} dF_s^{\mathbb{Q}^M}(x) \mid \mathcal{F}_t \right]_{x=L}.$$

2) *Information bruitée de l'initié.* On suppose l'hypothèse (HI). Le processus valeur du produit financier (C, G, Z) sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q}^I pour la filtration \mathbb{G}^I est

$$(1.9) \quad V_t^{\mathbb{G}^I, \mathbb{Q}^I} = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\int_{\mathbb{R}} V_t^{\mathbb{F}^I, \mathbb{Q}^I}(l) q_t(L_t - l) P^L(dl)}{\int_{\mathbb{R}} F_t^M(l) q_t(L_t - l) P^L(dl)}$$

avec

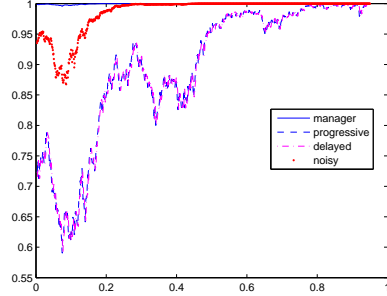
$$V_t^{\mathbb{F}^I, \mathbb{Q}^I}(l) = R_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[C R_T^{-1} F_{t,T}^I(u, l) + \int_t^T F_{t,\theta}^I(u, l) R_{\theta}^{-1} dG_{\theta} - \int_t^T R_{\theta}^{-1} Z_{\theta} dF_{t,\theta}^I(u, l) \mid \mathcal{F}_t \right]_{u=L_t},$$

$$F_{t,\theta}^I(u, l) = \mathcal{E} \left(\int_t^s \int \rho_s^I(u + y) \mu_{t,\theta}(dy) dW_s \right)^{-1} F_{\theta}^M(l).$$

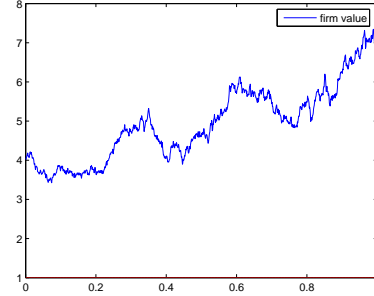
$\mu_{t,\theta}$ est la loi de probabilité de $(\epsilon_{\theta} - \epsilon_t)$.

1.3.3. Simulations numériques. — Voici quelques exemples numériques issus de [46] et illustrant les formules ci-dessus. On considère un modèle binomial pour la barrière L : $\mathbb{P}(L = l_i) = \alpha$, $\mathbb{P}(L = l_s) = 1 - \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) pour $0 < l_i \leq l_s$. On suppose que L est indépendante de $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et que le processus X est un mouvement brownien géométrique. On trace la fonction valeur d'un bond soumis au défaut pour les différentes informations (pour $l_i = 1, l_s = 3, \alpha = \frac{1}{2}$). Le délai δ choisi est très petit, donc les résultats pour information progressive et avec retard sont très proches. Le premier graphe représente la dynamique du prix du bond soumis au défaut dans le scénario correspondant à la valeur de la firme du second graphe.

Dans le scénario de la Figure 1, le *manager* a fixé la barrière basse, donc il estime des probabilités de défaut plus petites et des prix de bond soumis au défaut plus élevés (par rapport aux autres agents du marché). L'estimation d'un initié qui a une information bruitée est meilleure que celle d'un investisseur standard et avec retard. On observe des phénomènes similaires en Figure 2 qui correspond à un scénario avec une barrière haute.

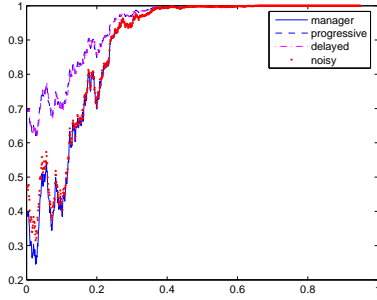


Dynamique du prix du defaultable bond

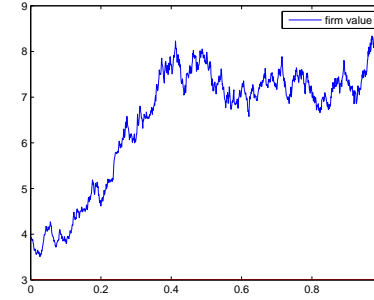


Valeur de la firme

FIGURE 1. $L = l_i$



Dynamique du prix du defaultable bond



Valeur de la firme

FIGURE 2. $L = l_s$

Dans [46] nous considérons aussi une barrière dépendant de la valeur de la firme de la façon suivante

$$L = l_i \mathbf{1}_{[a, +\infty[}(X_A) + l_s \mathbf{1}_{[0, a[}(X_A), \quad A > T, \quad 0 < l_i \leq l_s.$$

Le manager, qui est bien informé sur la santé économique de sa firme, peut donc savoir si sa valeur à une date A sera supérieure ou non à un niveau fixé a . Si $X_A \geq a$, la firme est en bonne santé et le *manager* choisit une barrière de défaut haute, sinon il choisit une barrière basse pour accélérer le défaut. Les formules explicites dans cet exemple sont données dans [46], et les résultats de simulations numériques sont similaires à celles précédemment obtenues pour une barrière L indépendante.

1.4. Optimisation de portefeuille d'un initié sur le risque de contrepartie

On considère un marché financier constitué d'un actif sans risque (que l'on suppose constant égal à 1) et d'un actif risqué S qui est soumis à un risque de contrepartie : l'actif S continue à exister après le défaut τ de la contrepartie mais il subit en τ un choc brutal. Cette fois $\tau := \inf\{t, \Lambda_t \geq L\}$ où Λ est un processus \mathbb{F} -adapté croissant positif, qui modélise par exemple les pertes cumulées de la contrepartie. Le problème d'optimisation de portefeuille d'un investisseur standard dans un tel marché a été étudié dans [57]. Avec Jiao, nous avons étudié dans [47] le cas d'un initié qui a une information supplémentaire sur la barrière de défaut de la contrepartie, comme modélisé précédemment, notre but étant de quantifier l'impact de cette information privée.

1.4.1. Modélisation du problème d'optimisation. —

1.4.1.1. Le marché avec risque de contrepartie. — On se fixe un horizon d'investissement T . Le prix S de l'actif risqué est un processus \mathbb{G} -adapté sur $[0, T]$

$$(1.10) \quad S_t = S_t^0 \mathbf{1}_{t < \tau} + S_t^1(\tau) \mathbf{1}_{t \geq \tau}, \quad 0 \leq t \leq T$$

avec S^0 processus \mathbb{F} -adapté et $S^1(\cdot)$ processus $\mathbb{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -adapté. Le prix S subit un saut au moment du défaut τ de la contrepartie

$$S_\tau^1(\tau) = S_{\tau-}^0(1 - \gamma_\tau)$$

où le processus \mathbb{F} -adapté γ représente la taille du saut (proportionnellement à la valeur de l'actif) en τ . On suppose $\gamma < 1$ ainsi S continue d'exister après τ . Un saut $\gamma > 0$ correspond à une perte au moment du défaut (cas de contagion), alors que $\gamma < 0$ correspond à un gain au moment du défaut (cas de concurrence/duopole avec la contrepartie).

L'initié choisit sa stratégie d'investissement en fonction de son flux d'information, modélisé par la filtration \mathbb{G}^M . Ainsi son portefeuille est un processus \mathbb{G}^M -prévisible π qui représente la proportion de richesse investie dans l'actif risqué

$$\pi_t = \mathbf{1}_{t \leq \tau} \pi_t^0(L) + \mathbf{1}_{t > \tau} \pi_t^1(\tau),$$

avec $\pi^0(\cdot)$ et $\pi^1(\cdot)$ processus $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurables. Ainsi la richesse correspondante de l'initié est un processus \mathbb{G}^M -adapté

$$(1.11) \quad X_t = \mathbf{1}_{t < \tau} X_t^0(L) + \mathbf{1}_{t \geq \tau} X_t^1(\tau)$$

qui satisfait l'équation d'autofinancement

$$\begin{aligned}
dX_t^0(L) &= X_t^0(L)\pi_t^0(L)\frac{dS_t^0}{S_t^0}, \quad 0 \leq t \leq T \\
dX_t^1(\tau) &= X_t^1(\tau)\pi_t^1(\tau)\frac{dS_t^1(\tau)}{S_t^1(\tau)}, \quad \tau \leq t \leq T \\
X_\tau^1(\tau) &= X_{\tau-}^0(L)(1 - \pi_\tau^0(L)\gamma_\tau).
\end{aligned}$$

On suppose $\pi_\tau^0(L)\gamma_\tau < 1$ ainsi le processus richesse est strictement positif. On considère les dynamiques suivantes pour l'actif risqué S avant défaut et après défaut

$$\begin{aligned}
dS_t^0 &= S_t^0(\mu_t^0 dt + \sigma_t^0 dW_t), \quad 0 \leq t \leq T \\
dS_t^1(\theta) &= S_t^1(\theta)(\mu_t^1(\theta) dt + \sigma_t^1(\theta) dW_t), \quad \theta \leq t \leq T
\end{aligned}$$

les coefficients μ^0 et σ^0 sont \mathbb{F} -adaptés, $\mu^1(\theta)$ et $\sigma^1(\theta)$ sont $\mathbb{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -adaptés et on suppose la condition d'intégrabilité

$$\int_0^T \left| \frac{\mu_t^0}{\sigma_t^0} \right|^2 dt + \int_\theta^T \left| \frac{\mu_t^1(\theta)}{\sigma_t^1(\theta)} \right|^2 dt + \int_0^T |\sigma_t^0|^2 dt + \int_\theta^T |\sigma_t^1(\theta)|^2 dt < \infty.$$

1.4.1.2. *Le problème d'optimisation de portefeuille.* — L'initié cherche à maximiser l'espérance d'une fonction d'utilité U de sa richesse terminale, étant donné son information $\mathcal{G}_0^M = \sigma(L)$ à l'instant 0

$$(1.12) \quad \text{ess sup}_{\pi \in \mathcal{A}_L} \mathbb{E}[U(X_T)|\sigma(L)],$$

parmi l'ensemble \mathcal{A}_L de ses stratégies admissibles $\pi = (\pi^0, \pi^1)$, $\pi^0(\cdot)$ et $\pi^1(\cdot)$ $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurables tels que

$$(1.13) \quad \forall l > 0, \left(\int_0^{\tau_l \wedge T} |\pi_t^0(l)\sigma_t^0|^2 dt + \int_{\tau_l \wedge T}^T |\pi_t^1(\tau_l)\sigma_t^1(\tau_l)|^2 dt \right) < \infty, \quad p.s.$$

$$0 \leq \pi \mathbf{1}_{\tau_l \leq t} \leq \delta_b \quad \text{et} \quad \pi_{\tau_l}^0(l)\gamma_{\tau_l} < 1,$$

où τ_l est le \mathbb{F} -temps d'arrêt $\tau_l := \inf\{t : \Lambda_t \geq l\}$. Sous l'hypothèse (HM),

$$\mathbb{E}[U(X_T)|\mathcal{G}_0^M] = \mathbb{E} \left[p_T(l) \left(\mathbf{1}_{T < \tau_l} U(X_T^0(l)) + \mathbf{1}_{T \geq \tau_l} U(X_T^1(\tau_l)) \right) \right]_{l=L}$$

Il suffit donc de maximiser ponctuellement (pour chaque l) l'espérance

$$(1.14) \quad V_0(l) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}_l} \mathbb{E} \left[p_T(l) \left(\mathbf{1}_{T < \tau_l} U(X_T^0(l)) + \mathbf{1}_{T \geq \tau_l} U(X_T^1(\tau_l)) \right) \right].$$

Par un théorème de sélection mesurable , on montre que

$$V_0(L) = \operatorname{ess\,sup}_{\pi \in \mathcal{A}_L} \mathbb{E}[U(X_T) | \mathcal{G}_0^M] \quad \text{p.s.}$$

Revenons brièvement sur les contraintes à l'achat et à la vente ($0 \leq \pi \mathbf{1}_{t \leq \tau_l} \leq \delta_b$) imposées sur les stratégies de l'initié.

1.4.1.3. Contraintes sur les stratégies d'investissement de l'initié. — Il est important d'imposer certaine contrainte sur les stratégies d'investissement d'un initié. Sinon, grâce à son information privée, l'initié peut anticiper la survenue du défaut τ et atteindre une richesse terminale non-bornée dans L^1 , comme le montre le résultat suivant.

Proposition 1.4.1. — *On suppose que :*

- (1) le processus Λ est strictement croissant sur $[0, T]$,
- (2) pour tout l appartenant au support de la loi de L , $\mathbb{P}(\Lambda_T \geq l) > 0$.

S'il n'y a pas de contraintes de vente à découvert et $\gamma > 0$ (respectivement s'il n'y a pas contraintes à l'achat et $\gamma < 0$), alors

$$\operatorname{ess\,sup}_{\pi \in \mathcal{A}_L} \mathbb{E}[X_T | \mathcal{G}_0^M] = +\infty \quad \text{p.s.}$$

De plus, pour toute utilité U vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = +\infty$,

$$\operatorname{ess\,sup}_{\pi \in \mathcal{A}_L} \mathbb{E}[U(X_T) | \mathcal{G}_0^M] = +\infty \quad \text{p.s.}$$

1.4.2. Résolution du problème d'optimisation. — Pour chaque $l > 0$, on résout le problème

$$\sup_{\pi \in \mathcal{A}_l} \mathbb{E} [p_T(l) (\mathbf{1}_{T < \tau_l} U(X_T^0(l)) + \mathbf{1}_{T \geq \tau_l} U(X_T^1(\tau_l)))]$$

en décomposant en deux étapes : un problème intermédiaire après-défaut puis un problème global avant-défaut, qui dépendent de π^1 et π^0 respectivement.

• Le problème intermédiaire après-défaut est indexé par “1” et s'écrit pour une condition ”initiale en τ_l ” x_l qui est \mathcal{F}_{τ_l} -mesurable

$$(1.15) \quad V_{\tau_l}^1(x_l) = \operatorname{ess\,sup}_{\pi^1(\tau_l) \in \mathcal{A}_l^1} \mathbb{E}[p_T(l) U(X_T^{1,x_l}(\tau_l)) | \mathcal{F}_{\tau_l}],$$

où \mathcal{A}_l^1 est l'ensemble des stratégies admissibles $(\pi_t^1(\tau_l), \tau \leq t \leq T)$ telles que $\int_{\tau_l}^{\tau_l \vee T} |\pi_t^1(\tau_l) \sigma_t^1(\tau_l)|^2 dt < \infty$ p.s.

• Le problème global avant défaut est indexé par “0” et s'écrit

(1.16)

$$V_0(l) = \sup_{\pi^0 \in \mathcal{A}_l^0} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{T < \tau_l} p_T(l) U(X_T^0(l)) + \mathbf{1}_{T \geq \tau_l} V_{\tau_l}^1(X_{\tau_l}^0(l)(1 - \pi_{\tau_l}^0(l)\gamma_{\tau_l})) \right].$$

où \mathcal{A}_l^0 est l'ensemble des stratégies admissibles $(\pi_t^0(l), 0 \leq t \leq \tau_l \wedge T)$ telles que $\int_0^{\tau_l \wedge T} |\pi_t^0(l)\sigma_t^0|^2 dt < \infty$, $0 \leq \pi_t^0(l) \leq \delta_b$ et $1 > \pi_{\tau_l}^0(l)\gamma_{\tau_l}$, p.s..

Le processus $(p_t(l), t \in [0, T])$ est essentiel dans notre approche. Il joue un rôle analogue à la densité de défaut de [57] $(\alpha_t(\theta), t \in [0, T])$ définie par $\alpha_t(\theta)d\theta = \mathbb{P}(\tau \in d\theta | \mathcal{F}_t)$.

1.4.2.1. Résolution du problème intermédiaire après-défaut. — Le problème après-défaut est standard car l'information privée de l'initié n'est plus pertinente après τ , en faisant néanmoins attention qu'ici l'instant "initial" τ_l est un temps d'arrêt (aléatoire). On introduit donc la filtration après-défaut $\mathbb{F}^1 := (\mathcal{F}_{\tau_l \vee t})_{t \in [0, T]}$, en particulier la tribu "initiale" $\mathcal{F}_0^1 = \mathcal{F}_{\tau_l}$ n'est pas triviale. On définit la \mathbb{F}^1 -martingale locale

$$Z_t(\tau_l) = \exp \left(- \int_{\tau_l}^{\tau_l \vee t} \frac{\mu_u^1(\tau_l)}{\sigma_u^1(\tau_l)} dW_u - \frac{1}{2} \int_{\tau_l}^{\tau_l \vee t} \left| \frac{\mu_u^1(\tau_l)}{\sigma_u^1(\tau_l)} \right|^2 du \right), \quad t \in [0, T].$$

on suppose que les coefficients $\mu^1(\tau_l)$ et $\sigma^1(\tau_l)$ vérifient le critère de Novikov $\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_{\tau_l}^{\tau_l \vee T} \left| \frac{\mu_u^1(\tau_l)}{\sigma_u^1(\tau_l)} \right|^2 du \right) \right] < \infty$ ainsi $(Z_t(\tau_l))_{t \in [0, T]}$ est une \mathbb{F}^1 -martingale.

Théorème 1.4.2. — *La fonction de valeur optimale du problème (1.15) est p.s. finie et est donnée par*

$$(1.17) \quad \hat{V}_{\tau_l}^1(x_l) = \mathbb{E} \left[p_T(l) U \left((U')^{-1}(\hat{y}_{\tau_l}(x_l) \frac{Z_T(\tau_l)}{p_T(l)}) \right) \middle| \mathcal{F}_0^1 \right]$$

où le multiplicateur de Lagrange $\hat{y}_{\tau_l}(\cdot)$ est l'unique solution $\mathcal{F}_{\tau_l} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ -mesurable de l'équation

$$\frac{1}{Z_t(\tau_l)} \mathbb{E} \left[Z_T(\tau_l) (U')^{-1}(\hat{y}_{\tau_l}(x_l) \frac{Z_T(\tau_l)}{p_T(l)}) \middle| \mathcal{F}_0^1 \right] = x_l.$$

La richesse optimale correspondante est

(1.18)

$$\hat{X}_t^{1, x_l}(\tau_l) = \frac{1}{Z_t(\tau_l)} \mathbb{E} \left[Z_T(\tau_l) (U')^{-1}(\hat{y}_{\tau_l}(x_l) \frac{Z_T(\tau_l)}{p_T(l)}) \middle| \mathcal{F}_t^1 \right], \quad \tau_l \leq t \leq T.$$

Pour des fonctions d'utilité puissance (fonctions CRRA) $U(x) = \frac{x^p}{p}$, $0 < p < 1$, $x > 0$, la richesse optimale est

$$\hat{X}_t^{1,x_l}(\tau_l) = \frac{x_l}{Z_t(\tau_l)} \frac{\mathbb{E} \left[p_T(l) \left(\frac{Z_T(\tau_l)}{p_T(l)} \right)^{\frac{p}{p-1}} \mid \mathcal{F}_t^1 \right]}{\mathbb{E} \left[p_T(l) \left(\frac{Z_T(\tau_l)}{p_T(l)} \right)^{\frac{p}{p-1}} \mid \mathcal{F}_{\tau_l} \right]}, \quad \tau_l \leq t \leq T$$

et la fonction valeur optimale

$$(1.19) \quad \hat{V}_{\tau_l}^1(x_l) = \frac{x_l^p}{p} \left(\mathbb{E} \left[p_T(l) \left(\frac{Z_T(\tau_l)}{p_T(l)} \right)^{\frac{p}{p-1}} \mid \mathcal{F}_{\tau_l} \right] \right)^{1-p} =: \frac{x_l^p}{p} K_{\tau_l}$$

avec $K_{\tau_l} = \left(\mathbb{E} \left[p_T(l) \left(\frac{Z_T(\tau_l)}{p_T(l)} \right)^{\frac{p}{p-1}} \mid \mathcal{F}_{\tau_l} \right] \right)^{1-p}$ une variable aléatoire \mathcal{F}_{τ_l} -mesurable qui ne dépend que de τ_l et des paramètres de marché. Nous nous concentrons sur cet exemple par la suite.

1.4.2.2. Résolution du problème global avant-défaut. — On résout le problème (1.16) pour des fonctions d'utilité puissance. D'après (1.19), le problème global avant-défaut s'écrit donc

$$(1.20) \quad V_0(l) = \sup_{\pi^0 \in \mathcal{A}_l^0} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{T < \tau_l} p_T(l) U(X_T^0(l)) + \mathbf{1}_{T \geq \tau_l} K_{\tau_l} U(X_{\tau_l}^0(l)(1 - \pi_{\tau_l}^0(l)\gamma_{\tau_l})) \right]$$

avec K_{τ_l} ne dépendant pas du processus de contrôle $\pi^0 \in \mathcal{A}_l^0$. On introduit la filtration avant défaut $\mathbb{F}^0 := (\mathcal{F}_{\tau_l \wedge t})_{t \in [0, T]}$. On utilise une approche programmation dynamique pour laquelle les contraintes de vente à découvert et d'achat vont jouer un rôle déterminant. Pour tout $\nu \in \mathcal{A}_l^0$, on introduit la famille des processus \mathbb{F}^0 -adaptés

$$\mathcal{X}_t(\nu) := \text{ess sup}_{\pi^0 \in \mathcal{A}_l^0(t, \nu)} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{T < \tau_l} p_T(l) U(X_T^0(l)) + \mathbf{1}_{t < \tau_l \leq T} K_{\tau_l} U(X_{\tau_l}^0(l)(1 - \pi_{\tau_l}^0(l)\gamma_{\tau_l})) \mid \mathcal{F}_{\tau_l \wedge t} \right]$$

où $\mathcal{A}_l^0(t, \nu)$ est l'ensemble des stratégies qui coïncident avec ν jusqu'en t . Ainsi $V_0(l) = \mathcal{X}_0(\nu)$ quelque soit $\nu \in \mathcal{A}_l^0$. De plus, on montre que pour toute stratégie $\pi^0 \in \mathcal{A}_l^0$, il existe une suite de stratégies $(\pi_n^0 \in \mathcal{A}_l^0)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $\pi_{n, \tau_l}^0 = \delta_b \mathbf{1}_{\{\gamma < 0\}}$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{X}_0(\pi_n^0) \geq \mathcal{X}_0(\pi^0).$$

Ainsi la stratégie optimale à l'instant de défaut consiste à saturer la contrainte de vente à découvert (respectivement d'achat) si $\gamma > 0$ (respectivement $\gamma < 0$).

La théorie de la programmation dynamique permet de caractériser le portefeuille optimale $\hat{\pi}^0$ comme étant le portefeuille de \mathcal{A}_l^0 qui rend la \mathbb{F}^0 -supermartingale

$$\xi_t^\nu := \mathcal{X}_t(\nu) + \mathbf{1}_{t \geq \tau_l} K_{\tau_l} U(X_{\tau_l}^{\nu,0}(l)(1 - \nu_{\tau_l}(l)\gamma_{\tau_l})), \quad 0 \leq t \leq T$$

(pour $\nu \in \mathcal{A}_l^0$) une \mathbb{F}^0 -martingale. Le processus \mathbb{F}^0 -adapté (défini pour $0 \leq t \leq T$)

(1.21)

$$\begin{aligned} Y_t &:= \frac{\mathcal{X}_t(\nu)}{U(X_t^{\nu,0}(l))} \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{\pi^0 \in \mathcal{A}_l^0(t,\nu)} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{T < \tau_l} p_T(l) \left(\frac{X_T^0(l)}{X_t^{\nu,0}(l)} \right)^p + \mathbf{1}_{t < \tau_l \leq T} K_{\tau_l} \left(\frac{X_{\tau_l}^0(l)}{X_t^{\nu,0}(l)} \right)^p (1 - \pi_{\tau_l}^0(l)\gamma_{\tau_l}) | \mathcal{F}_{\tau_l \wedge t} \right] \end{aligned}$$

ne dépend pas de $\nu \in \mathcal{A}_l^0$ et est identiquement nul après τ_l . Le processus Y est caractérisé comme la plus petite solution dans $L_l^+(\mathbb{F}^0)$ de l'équation différentielle stochastique rétrograde (1.22), où $L_l^+(\mathbb{F}^0)$ est l'ensemble des processus \mathbb{F}^0 -adaptés \tilde{Y} tels que $\tilde{Y}_t > 0$ pour $0 \leq t < \tau_l$ et $\tilde{Y}_t = 0$ pour $t \geq \tau_l$.

Théorème 1.4.3. — *Le processus Y défini en (1.21) est la plus petite solution dans $L_l^+(\mathbb{F}^0)$ de l'EDSR :*

(1.22)

$$Y_t = \mathbf{1}_{T < \tau_l} p_T(l) + \mathbf{1}_{t < \tau_l \leq T} K_{\tau_l} \frac{(1 - \delta_b \mathbf{1}_{\{\gamma < 0\}} \gamma_{\tau_l})^p}{p} + \int_t^{T \wedge \tau_l} f(\theta, Y_\theta, \phi_\theta) d\theta - \int_t^{T \wedge \tau_l} \phi_\theta dW_\theta,$$

où $0 \leq t \leq \tau_l \wedge T$, $\phi \in L_{loc}^2(W)$, et

$$(1.23) \quad f(s, Y_s, \phi_s) = p \operatorname{ess\,sup}_{\nu \in \mathcal{A}_l^0, s.t. \nu_{\tau_l} = \delta_b \mathbf{1}_{\{\gamma < 0\}}} \left[(\mu_s^0 Y_s + \sigma_s^0 \phi_s) \nu_s - \frac{1-p}{2} Y_s |\nu_s \sigma_s^0|^2 \right].$$

La stratégie optimale se caractérise donc via l'optimisation du générateur f de l'EDSR, qui présente un saut en τ_l . Le processus Y (et donc la fonction valeur $\mathcal{X}_0(\nu)$) se caractérise comme la limite des fonctions valeurs d'une suite de stratégies admissibles qui réalisent asymptotiquement l'essentiel supremum de (1.23).

Quelque soit la stratégie $\pi^0 \in \mathcal{A}_l^0$, on rappelle la fonction valeur correspondante

$$(1.24) \quad \mathcal{X}_0(\pi^0) = \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{T < \tau_l} p_T(l) U(X_T^{\pi^0}(l)) + \mathbf{1}_{T \geq \tau_l} K_{\tau_l} U(X_{\tau_l}^{\pi^0}(l) (1 - \pi_{\tau_l}^0(l) \gamma_{\tau_l})) \right].$$

Une approche naïve pour trouver le portefeuille optimal est de choisir d'abord π^0 en τ_l en posant $\pi_{\tau_l}^0 = \delta_b \mathbf{1}_{\{\gamma < 0\}}$ puis de maximiser le générateur (1.23) pour $t < \tau_l$. Mais le candidat naturel ainsi obtenu

$$(1.25) \quad \pi^{\text{np}} := \mathbf{1}_{[0, \tau_l]} \hat{\pi}^0 + \delta_b \mathbf{1}_{\{\gamma < 0\}} \mathbf{1}_{\{\tau_l\}},$$

n'est pas prévisible et donc n'appartient pas à \mathcal{A}_l^0 . Néanmoins, on peut construire une suite de stratégies prévisibles dont la fonction valeur converge vers celle donnée par π^{np} .

Proposition 1.4.4. — Soit $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante de \mathbb{F} -temps d'arrêt qui converge vers τ_l . On considère les stratégies $(\pi_n^0 = \mathbf{1}_{[0, \tau_n]} \hat{\pi}^0 + \mathbf{1}_{[\tau_n, \tau_l]} \delta_b \mathbf{1}_{\{\gamma < 0\}})$ où $\hat{\pi}^0$ est le processus optimal pour

$$Y_t^0 = \mathbf{1}_{T < \tau_l} p_T(l) + \mathbf{1}_{t < \tau_l \leq T} K_{\tau_l} \frac{(1 - \delta_b \mathbf{1}_{\{\gamma < 0\}} \gamma_{\tau_l})^p}{p} + \int_t^{T \wedge \tau_l} f^0(\theta, Y_\theta^0, \phi_\theta^0) d\theta - \int_t^{T \wedge \tau_l} \phi_\theta^0 dW_\theta,$$

$$f^0(s, y, \phi) = p \sup_{0 \leq \nu \leq \delta_b} \left[(\mu_s^0 y + \sigma_s^0 \phi) \nu - \frac{1-p}{2} y |\nu \sigma_s^0|^2 \right].$$

Ces stratégies sont dans \mathcal{A}_l^0 et vérifient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{X}_0(\pi_n^0) = V_0(l) = \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{T < \tau_l} p_T(l) U(X_T^{\hat{\pi}^0}(l)) + \mathbf{1}_{T \geq \tau_l} K_{\tau_l} U(X_{\tau_l}^{\hat{\pi}^0}(l) (1 - \delta_b \mathbf{1}_{\{\gamma < 0\}} \gamma_{\tau_l})) \right].$$

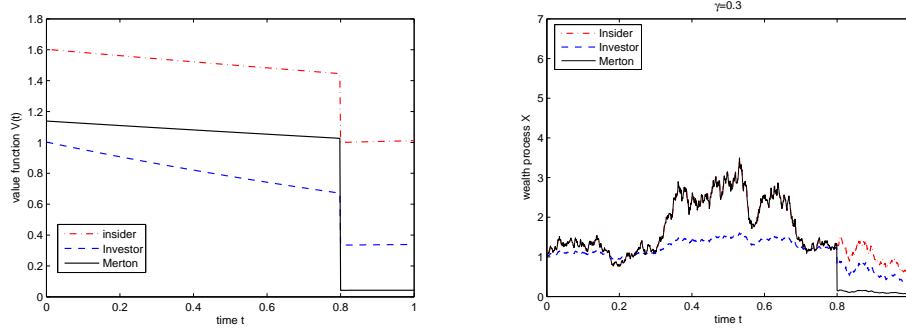
1.4.3. Simulations numériques. — Ci-dessous on donne quelques simulations issues de [47] qui permettent de comparer numériquement, pour une trajectoire donnée, les fonctions valeurs optimales et les processus richesses pour trois niveaux d'information différents : l'initié, l'investisseur standard et la stratégie de Merton (c'est-à-dire la stratégie optimale d'un investisseur qui ne prend pas du tout en compte l'éventualité du défaut et optimise son portefeuille comme si l'actif suit toujours la dynamique avant défaut). Le détail des paramètres utilisés pour ces simulations est donné dans [47].

La figure 3 correspond à $\gamma = 0.3$ (i.e. une perte de l'actif risqué au moment du défaut). A l'instant du défaut la fonction valeur et la richesse, quelque soit la stratégie, subissent une perte. La fonction valeur de l'initié surperforme les fonctions valeurs des autres investisseurs avant et après défaut. Avant le défaut, la fonction valeur de la stratégie de Merton est plus grande que celle d'un investisseur standard, mais la perte au moment du défaut est beaucoup

plus importante : en effet l'éventualité du défaut est pris en compte dès le début par un investisseur standard, contrairement à celle de Merton.

Le processus richesse d'un initié coïncide avec celui de Merton presque jusqu'au défaut. Néanmoins, grâce à son information, il ajuste sa stratégie juste avant le défaut afin de ne pas être impacté par la perte de l'actif risqué. Les investisseurs standard et Merton eux subissent une perte de leur richesse au moment du défaut (plus importante pour Merton que pour l'investisseur standard).

FIGURE 3. Fonction valeur et richesse pour initié, investisseur standard et Merton : $\gamma = 0.3$.



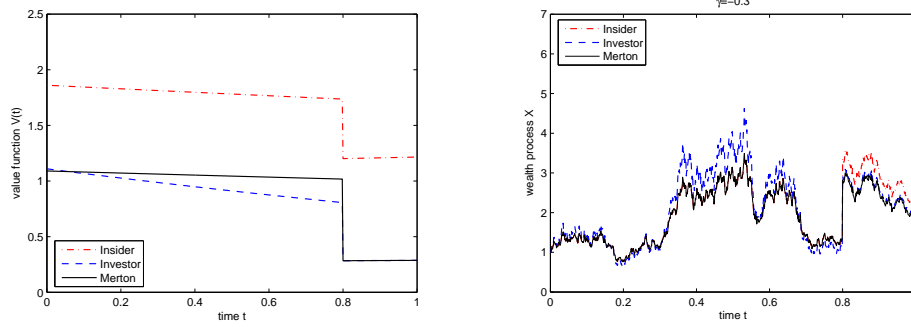
La figure 4 considère le cas $\gamma = -0.3$ (ie un gain au moment du défaut). Le comportement de la fonction valeur est similaire au cas $\gamma > 0$. Par contre la richesse a un gain au moment du défaut, et le profit de l'initié est d'autant plus important que la taille du saut $|\gamma|$ est grande et que la contrainte δ_b est grande.

De plus, en réalisant plusieurs trajectoires pour différentes valeurs de δ_b , on constate que cette contrainte d'achat a un effet régularisant sur les trajectoires.

1.5. Perspectives

Un travail en cours avec Christophette Blanchet et Ying Jiao concerne le cas d'une barrière de défaut qui n'est pas fixée dès le début mais qui peut être

FIGURE 4. Fonction valeur et richesse pour initié, investisseur standard et Merton : $\gamma = -0.3$.



réactualisée au cours du temps à des dates $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = T$:

$$L_t = \sum_{i=0}^n L^i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t)$$

où les L^i sont des variables aléatoires. L'information du *manager* est alors décrite par la filtration $\mathcal{G}_t^M = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L_s, s \leq t)$. Ceci conduit au problème théorique de grossissements successifs de filtrations, que nous résolvons de deux façons différentes. La première consiste à faire des itérations successives de grossissement de filtration aux différents instants t_i en considérant $\mathcal{G}_t^i := \mathcal{G}_t^{i-1} \vee \sigma(L^i)$ (par convention $\mathcal{G}_t^{-1} = \mathcal{F}_t$). On construit alors une famille de mesure de probabilités $\{\mathbb{P}^i, i = 0, \dots, n\}$, équivalente à \mathbb{P} , telles que

1. $\mathbb{P}^i(L^{i+1} \in dx | \mathcal{G}_t^i) \sim \mathbb{P}^i(L^{i+1} \in dx)$ avec la convention $\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}$,
2. \mathbb{P}^{i+1} équivalente à \mathbb{P}^i ,
3. \mathbb{P}^{i+1} identique à \mathbb{P}^i sur \mathbb{G}^i et \mathbb{P}^{i+1} identique à \mathbb{P}^i sur $\sigma(L^{i+1})$,
4. Sous \mathbb{P}^{i+1} , L^{i+1} est indépendant de \mathbb{G}^i .

Sous \mathbb{P}^n , (L^0, \dots, L^n) est indépendant de \mathbb{F} , et les composantes sont indépendantes entre elles.

La deuxième approche consiste en un grossissement par toute l'information (L^0, \dots, L^n) disponible sur les barrières sur un horizon $[0, T]$, puis à projeter sur l'information disponible en t . On construit une mesure de probabilité \mathbb{Q}^L équivalente à \mathbb{P} sous laquelle les L^i sont indépendantes entre elles et de \mathbb{F} . Une

comparaison entre \mathbb{P}^n et \mathbb{Q}^L montre l'importance des distributions jointes de L sous \mathbb{P} .

Une étude analytique puis numérique sur l'estimation de probabilités de défaut est menée.

D'autre part, j'ai initié avec Cody Hyndman un projet concernant le rôle d'une asymétrie d'information concernant la stratégie de liquidation d'un fond de pension, entraînant un impact sur le marché. Plus précisément, pour des raisons de liquidité ou d'appels de marge, un fond doit liquider sa position concernant un sous-jacent donné lorsque le cours (S_t) de celui-ci passe au dessous d'un niveau $(\alpha_t S_0)$, (α_t) étant ajusté régulièrement en fonction de la situation économique du fond de pension. Cette vente au rabais (*fire sale*) du hedge fund entraîne un saut sur le cours de l'actif (*market impact*), qui peut être exploité par des investisseurs qui connaissent les contraintes de liquidité du hedge fund (et qui ont donc des informations sur le processus α).

CHAPITRE 2

RISQUE DE LONGÉVITÉ

Le risque de longévité est un risque important pour les fonds de pensions et les assureurs qui se sont engagés à payer des rentes à leurs assurés. Il ne faut pas confondre risque de longévité et de mortalité : le premier est un risque de long terme ; le second est un risque de court terme, dont une composante importante est le risque de catastrophe (pandémie, terrorisme, risques biologiques et sanitaires, ...). Afin de développer un marché de la longévité et de créer de la liquidité et attirer les investisseurs, des transferts "d'annuités" doivent se faire de l'assurance vers les marchés de capitaux sous différentes formes, la titrisation en particulier, mais aussi des bonds ou swaps de longévité..... Il y a besoin d'attirer les investisseurs en payant une prime de risque contre une baisse "excessive" de la mortalité. L'ampleur des montants en jeu permettent de penser que le risque de longévité semble pouvoir satisfaire aux conditions qui permettent de développer un marché avec succès. Du point de vue du marché financier, il y a plusieurs problèmes à résoudre :

- comprendre les risques associés à la longévité, à travers des modèles plus riches que ceux actuellement considérés.
- comprendre les besoins effectifs associés à ce transfert de risque, en isolant en particulier le risque de taux long terme.
- créer et développer un indice représentatif du risque de base, mais suffisamment transparent et fiable.
- proposer des produits qui correspondent à des couvertures efficaces, tout en étant attractifs.
- définir des méthodes de *pricing* et de couverture en rapport avec le peu de liquidité attendue.
- modéliser les taux long terme avec plus de réalisme qu'actuellement.

- trouver des solutions pour modéliser et réduire le risque de base

Le fruit de ces réflexions a donné lieu à un travail collectif de synthèse [5], où nous avons tenté de faire le point et de proposer des idées sur les types de modélisations du risque de longévité, les questions réglementaires, ainsi que les problèmes relatifs au transfert du risque, à l'évaluation et à la couverture de ces produits. Depuis lors, je me suis plus particulièrement concentrée sur la modélisation de taux d'intérêt long terme.

Dans deux travaux en collaboration avec Nicole El Karoui et Mohamed Mrad [24] et [23], nous proposons un point de vue financier sur l'étude des taux d'intérêt long terme. En finance, les modèles classiques de taux ne s'appliquent plus pour des maturités longues (15 ans et plus). Nous montrons que les techniques de maximisation d'utilité espérée permettent de donner une interprétation financière de la règle de Ramsey, qui relie la courbe des taux à l'utilité marginale de la consommation optimale. Néanmoins, sur des problèmes de très long terme, les économistes s'accordent sur la nécessité d'un schéma de décision séquentielle. Aussi nous avons étendu ces résultats au cas où les fonctions d'utilité sont progressives. Ceci nous permet de nous affranchir de la dépendance de la courbe des taux en l'horizon du problème d'optimisation, et de mettre l'accent sur la dépendance en la richesse initiale.

D'autre part nous proposons dans un travail en cours [H14] avec Isabelle Camiller et Nicole El Karoui, une nouvelle manière d'appréhender la consommation, comme des provisions que l'investisseur met de côté pour les utiliser en cas d'un événement de défaut. Le problème de maximisation de l'utilité espérée de la richesse et de la consommation peut être ainsi formulé comme un problème de maximisation de l'utilité espérée de la richesse terminale avec un horizon aléatoire.

2.1. Utilité Progressive et l'univers d'investissement

Afin de fixer les idées pour la suite, nous rappelons ici très brièvement les caractéristiques et résultats importants sur les utilités progressives. Nous renvoyons à [22] pour une étude détaillée.

2.1.1. L'univers d'investissement. — On considère un marché incomplet d'Itô, avec W un mouvement brownien standard n -dimensionnel, et caractérisé par un taux court (r_t) et un vecteur prime de risque n -dimensionnel (η_t) . Tous ces processus sont définis sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions usuelles ; (r_t) et (η_t) sont progressivement mesurables, $\int_0^T (r_t +$

$$\|\eta_t\|^2)dt < \infty, p.s..$$

Les agents investissent dans ce marché financier et peuvent consommer une partie de leur richesse au taux $C_t \geq 0$. Nous donnons la définition de la classe de stratégies admissibles (κ_t, C_t) , sans spécifier les actifs risqués, l'incomplétude du marché étant caractérisée par des restrictions sur les stratégies qui sont contraintes à évoluer dans un espace vectoriel progressif (\mathcal{R}_t) .

Définition 2.1.1 (Processus Test). — (i) La dynamique d'auto-financement d'un processus de richesse associé au portefeuille κ et au taux de consommation C est donnée par

$$(2.1) \quad dX_t^{\kappa, C} = X_t^{\kappa, C} [r_t dt + \kappa_t (dW_t + \eta_t dt)] - C_t dt, \quad \kappa_t \in \mathcal{R}_t,$$

avec C processus progressif positif, κ processus progressif n -dimensionnel de \mathcal{R}_t , tels que $\int_0^T (C_t + \|\kappa_t\|^2) dt < \infty, p.s..$

(ii) Une stratégie (κ_t, C_t) est dite admissible si elle est arrêtée à la banqueroute de l'investisseur (quand le processus richesse atteint 0).

(iii) L'ensemble des processus richesse avec stratégies admissibles (aussi appelés processus test) est noté \mathcal{X}^c (ou bien $\mathcal{X}_t^c(x)$ pour des richesses partant de x en t)

Définition 2.1.2 (Processus prix d'état). — (i) Une semimartingale d'Itô Y est appelée processus prix d'état ($Y \in \mathcal{Y}$) si quelque soit le processus test $X^{\kappa, C}$, $\kappa \in \mathcal{R}$,

$$(Y_t X_t^{\kappa, C} + \int_0^t Y_s C_s ds) \text{ est une martingale locale.}$$

(ii) Cette propriété est équivalente à l'existence d'un processus progressif $\nu_t \in \mathcal{R}_t^\perp$, ($\int_0^T \|\nu_t\|^2 dt < \infty, a.s.$) tel que $Y = Y^\nu$ où Y^ν est le produit de Y^0 ($\nu = 0$) avec la martingale locale exponentielle $L_t^\nu = \mathcal{E}(\int_0^t \nu_s \cdot dW_s)$, dont la dynamique est

$$(2.2) \quad dY_t^\nu = Y_t^\nu [-r_t dt + (\nu_t - \eta_t^\mathcal{R}) \cdot dW_t], \quad \nu_t \in \mathcal{R}_t^\perp, \quad Y_0^\nu = y.$$

Afin de mettre en évidence la dépendance en la condition initiale, la solution de (2.2) avec condition initiale y est notée $(Y_t^\nu(y))$ et $Y_t^\nu := Y_t^\nu(1)$; de même $(X_t^{\kappa, C}(x))$ est la solution de (2.1) avec condition initiale x et $X_t^{\kappa, C} := X_t^{\kappa, C}(1)$.

Notation : Quelque soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x^\mathcal{R}$ est la projection orthogonale du vecteur x sur \mathcal{R} et x^\perp est la projection orthogonale sur \mathcal{R}^\perp .

L'existence de la prime de risque η implique l'absence d'opportunité d'arbitrage. Puisque d'après (2.1), la prime de risque n'intervient que par le terme $\eta_t \kappa_t$, il existe une prime de risque "minimale" qui est la projection de η_t sur

l'espace \mathcal{R}_t . Par la suite, on considère donc $\eta^{\mathcal{R}}$. D'après l'équation (2.1), le processus prix d'état minimal Y^0 (correspondant à $\nu = 0$), dont la dynamique est $dY_t^0 = Y_t^0[-r_t dt + (\nu_t - \eta_t^{\mathcal{R}}).dW_t]$, appartient à la famille convexe \mathcal{Y} des processus d'Itô positifs Y tels que $(Y_t X_t^{\kappa, C} + \int_0^t Y_s C_s ds)$ est une martingale locale pour toute stratégie admissible (κ, C) .

2.1.2. Système d'utilités \mathcal{X}^c -consistant et optimisation de portefeuille avec consommation. — Pour des problèmes d'optimisation à long terme, il est important de pouvoir adapter le critère d'utilité notamment aux évolutions macro-économiques, d'où l'introduction du concept d'utilité progressive.

Définition 2.1.3 (Utilité Progressive). —

(i) Une *utilité progressive* est un champ aléatoire progressif de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* , $\mathbf{U} = \{U(t, x); t \geq 0, x > 0\}$, partant de la fonction d'utilité déterministe u en $t = 0$, et telle que $\forall(t, \omega), x \mapsto U(\omega, t, x)$ est une fonction d'utilité positive, strictement concave, strictement croissante et satisfaisant les conditions d'Inada :

- $\forall(t, \omega), U(t, \omega, x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$,
- La dérivée U_x (aussi appelée utilité marginale) vérifie $U_x(t, \omega, x) \rightarrow \infty$ quand $x \rightarrow 0$, et $U_x(t, \omega, x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$.

Soient donc (\mathbf{U}, \mathbf{V}) deux utilités progressives, \mathbf{U} pour la richesse terminale et \mathbf{V} pour le taux de consommation. Pour $t = 0$, les utilités $U(0, \cdot) =: u(\cdot)$ et $V(0, \cdot) =: v(\cdot)$ sont déterministes, par la suite les lettres minuscules réfèrent toujours à des utilités déterministes et les lettres capitales à des utilités progressives.

Comme en apprentissage statistique, le critère d'optimisation est ajusté de manière dynamique en tenant compte de l'information du marché. Ainsi, les données de marché fournissent un univers de calibration à travers les processus test de \mathcal{X}^c par rapport auxquels l'utilité est choisie de façon à donner la meilleure satisfaction. Ceci justifie la définition de système d'utilités progressives \mathcal{X}^c -consistant.

Définition 2.1.4. — Un système d'utilités d'investissement et de consommation \mathcal{X}^c -consistant est une paire d'utilités progressives \mathbf{U} et \mathbf{V} sur $\Omega \times [0, +\infty) \times \mathbb{R}^+$ telles que

(i) CONSISTANCE AVEC LES PROCESSUS TESTS Quelque que soit le processus

richesse admissible $X^{\kappa, C} \in \mathcal{X}^c$,

$$\mathbb{E}(U(t, X_t^{\kappa, C}) + \int_s^t V(s, C_s) ds | \mathcal{F}_s) \leq U(s, X_s^{\kappa, C}), \quad \forall s \leq t \text{ p.s.}$$

C'est-à-dire le processus $(U(t, X_t^{\kappa, C}) + \int_0^t V(s, C_s) ds)$ est une surmartingale positive, arrêtée au premier instant de banqueroute.

(ii) **EXISTENCE D'UNE STRATÉGIE OPTIMALE** : Pour toute richesse initiale $x > 0$, il existe une stratégie optimale (κ^*, C^*) telle que le processus richesse associé partant de x , $X^* = X^{\kappa^*, C^*}(x) \in \mathcal{X}^c$ est tel que $(U(t, X_t^*) + \int_0^t V(s, C_s^*) ds)$ est une martingale locale.

En résumé, $U(t, x)$ est la fonction valeur du problème d'optimisation

$$(2.3) \quad \forall T \geq t, \quad U(t, x) = \operatorname{ess\,sup}_{X^{\kappa, C} \in \mathcal{X}_t^c(x)} \mathbb{E}(U(T, X_T^{\kappa, C}) + \int_t^T V(s, C_s) ds | \mathcal{F}_t) \text{ p.s.}$$

Toute stratégie optimale (X^*, C^*) est optimale pour tous ces problèmes, indépendamment de l'horizon T : une telle stratégie est appelée stratégie myope.

L'analyse convexe montre l'intérêt d'introduire les champs aléatoires conjugués \tilde{U} et \tilde{V} , définis en tant que transformés de Fenchel-Legendre $\tilde{U}(t, y) = \sup_{c \geq 0, c \in \mathcal{Q}^+} (U(t, c) - cy)$ (de même pour \tilde{V}), c.f. Karatzas-Shreve [59], Rogers [76].

Proposition 2.1.5 (Dualité). — Soit (\mathbf{U}, \mathbf{V}) un système d'utilités progressives \mathcal{X}^c -consistant avec stratégie optimale (κ^*, C^*) générant le processus richesse positif $X^* = X^{\kappa^*, C^*}$. Alors le système convexe conjugué $(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{V}})$ vérifie :

(i) Quelque soit $Y^\nu \in \mathcal{Y}$ prix d'état avec $\nu \in \mathcal{R}^\perp$, $(\tilde{U}(t, Y_t^\nu) + \int_0^t \tilde{V}(s, Y_s^\nu) ds)$ est une surmartingale, et il existe un unique processus optimal $Y^* := Y^{\nu^*}$ avec $\nu^* \in \mathcal{R}^\perp$ tel que $(\tilde{U}(t, Y_t^*) + \int_0^t \tilde{V}(s, Y_s^*) ds)$ est une martingale locale.

(ii) En résumé, $\tilde{U}(t, y)$ est la fonction valeur du problème d'optimisation

(2.4)

$$\forall T \geq t, \quad \tilde{U}(t, y) = \operatorname{ess\,sup}_{Y^\nu \in \mathcal{Y}_t(y)} \mathbb{E}(\tilde{U}(T, Y_T^\nu(y)) + \int_t^T \tilde{V}(s, Y_s^\nu(y)) ds | \mathcal{F}_t), \text{ p.s.}$$

et la stratégie optimale Y^* est myope (i.e. ne dépend pas de l'horizon T).

(iii) **CARACTÉRISATION DES PROCESSUS OPTIMAUX** Sous des hypothèses de

régularité, les conditions du 1er ordre impliquent les liens suivants entre les processus optimaux ainsi que leurs conditions initiales

$$(2.5) \quad Y_t^*(y) = U_x(t, X_t^*(x)) = V_c(t, C_t^*(c)), \quad y = u_x(x) = v_c(c).$$

Le processus consommation optimale $C^*(c)$ s'écrit en tant que fonction du processus richesse optimale $X^*(x)$ par l'intermédiaire du processus monotone progressif $\zeta^*(x)$ défini par

$$(2.6) \quad \zeta_0^*(x) = -\tilde{v}_y(u_x(x)), \quad \zeta_t^*(x) = -\tilde{V}_y(U_x(x)), \quad C_t^*(c) = \zeta_t^*(X_t^*(x)).$$

Le résultat suivant donne une construction explicite de système d'utilités progressives \mathcal{X}^c -consistant (cf. [24] pour la preuve).

Théorème 2.1.6. — Soit $\bar{\zeta}(x)$ un processus progressif positif, croissant en x et soit $\bar{X}(x)$ une solution strictement monotone de l'EDS

$$d\bar{X}_t(x) = \bar{X}_t(x)[r_t dt + \kappa_t^*(\bar{X}_t(x)) \cdot (dW_t + \eta_t^{\mathcal{R}} dt)] - \bar{\zeta}_t(\bar{X}_t(x)) dt, \quad \kappa_t^*(\bar{X}_t(x)) \in \mathcal{R}_t$$

dont le flot inverse est noté $\bar{\mathcal{X}}(z)$. Soit $\bar{Y}(y)$ une solution strictement monotone de l'EDS

$$d\bar{Y}_t(y) = \bar{Y}_t(y)[-r_t dt + (\nu_t^*(\bar{Y}_t(y)) - \eta_t^{\mathcal{R}}) \cdot dW_t], \quad \nu_t^*(\bar{Y}_t(y)) \in \mathcal{R}_t^\perp.$$

Etant donné les utilités déterministes (u, v) telles que $\bar{\zeta}_0(x) = \zeta(x) = -\tilde{v}_y(u_x(x))$, il existe un système (U, V) d'utilités progressives \mathcal{X}^c -consistant tel que $(\bar{X}(x), \bar{Y}(y))$ est le processus optimal associé, défini par :

(2.7)

$$U_x(t, x) = \bar{Y}_t(u_x(\bar{\mathcal{X}}_t(x))), \quad V_c(t, c) = U_x(t, \bar{\zeta}_t^{-1}(c)) \text{ avec } \bar{\zeta}_t^{-1}(c) = u_x^{-1}(v_c(c)).$$

2.1.3. Utilités \mathcal{X}^c -consistantes dont les processus optimaux sont linéaires. — La proposition suivante (cf. [23]) caractérise les systèmes d'utilités progressives \mathcal{X}^c -consistantes dont les processus optimaux sont linéaires

$$X_t^*(x) = xX_t^* \text{ avec } X_t^* := X_t^*(1), \quad Y_t^*(y) = yY_t^* \text{ avec } Y_t^* := Y_t^*(1)$$

Proposition 2.1.7. — (i) Un système (U, V) d'utilités progressives \mathcal{X}^c -consistant génère des processus optimaux X^* et Y^* linéaires si et seulement si

$$U(t, x) = Y_t^* X_t^* u\left(\frac{x}{X_t^*}\right), \quad V(t, c) = \zeta_t^* U\left(t, \frac{c}{\zeta_t^*}\right) \quad \text{avec } \zeta_t(x) = x \zeta_t.$$

Les processus optimaux sont alors de la forme

$$X_t^*(x) = xX_t^*, \quad Y_t^*(y) = yY_t^*, \quad \text{et} \quad C_t^*(x) = X_t^*(x)\zeta_t^*.$$

(ii) UTILITÉS PUISSANCE *Un système $(U^{(\theta)}, V^{(\theta)})$ d'utilités puissances progressives \mathcal{X}^c -consistant (avec θ coefficient d'aversion au risque) génère des processus optimaux linéaires et est donc de la forme $(U^{(\theta)}(t, x) = \frac{Y_t^* X_t^*}{1-\theta} (\frac{x}{X_t^*})^{1-\theta}, V^{(\theta)}(t, x) = (\frac{C_t^*}{c})^\theta \frac{Y_t^* X_t^*}{1-\theta} (\frac{x}{X_t^*})^{1-\theta})$.*

2.1.4. Fonction valeur d'un problème d'optimisation rétrograde classique. — Les problèmes d'optimisation d'utilité dans la littérature économique utilisent des fonctions d'utilités classiques, comme c'est le cas par exemple concernant la règle de Ramsey. Nous résumons ici les différences et similitudes entre utilité progressive consistante et fonction valeur d'un problème d'optimisation classique.

Le problème d'optimisation classique d'optimisation de la consommation et de la richesse terminale se formule ainsi

$$(2.8) \quad \sup_{(\kappa, c) \in \mathcal{X}^c} \mathbb{E} \left(u(X_{T_H}^{\kappa, c}) + \int_0^{T_H} v(t, c_t) dt \right).$$

où T_H est un horizon fixé et $u(\cdot)$, $v(t, \cdot)$ sont des utilités déterministes. Quelque soit τ \mathbb{F} -temps d'arrêt (à valeur dans $[0, T_H]$) et quelque soit ξ_τ variable aléatoire positive \mathcal{F}_τ -mesurable, on définit la famille de variables aléatoires indexées par (τ, ξ_τ)

$$(2.9) \quad \mathcal{V}(\tau, \xi_\tau) = \operatorname{ess\,sup}_{(\kappa, c) \in \mathcal{X}^c(\tau, \xi_\tau)} \mathbb{E} \left(u(X_{T_H}^{\kappa, c}(\tau, \xi_\tau)) + \int_\tau^{T_H} v(s, c_s) ds \middle| \mathcal{F}_\tau \right), \text{ p.s.}$$

avec condition terminale $\mathcal{U}(T_H, x) = u(x)$, et $\mathcal{X}^c(\tau, \xi_\tau)$ est l'ensemble des stratégies admissibles partant de ξ_τ en τ (arrêtées quand le processus richesse atteint 0). On suppose l'existence d'une utilité progressive (que l'on note toujours $\mathcal{U}(t, x)$) qui aggrège le système (2.9). Quand le principe de programmation dynamique est vérifiée, le système d'utilités $(\mathcal{U}(t, \cdot), v(t, \cdot))$ est \mathcal{X}^c -consistant. Néanmoins, dans cette vision rétrograde, il n'est pas facile de montrer l'existence de processus optimaux monotones. De plus, dans cette formulation rétrograde, la stratégie optimale dépend de l'horizon T_H .

Remarque : Ce problème d'inconsistance en temps est aussi présent dans la littérature économique. En effet on considère très souvent un horizon infini $T_H = +\infty$ et $v(t, c) = e^{-\beta t} v(c)$ (fonction d'utilité séparable en temps avec décroissance exponentielle), ce qui revient ⁽¹⁾ (en espérance) à considérer une utilité v et un horizon aléatoire τ_H de loi exponentielle de paramètre β . La règle

1. si la variable aléatoire τ_H est indépendante de loi exponentielle de paramètre β ,
 $\mathbb{E}(\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} v(c_t) dt) = \mathbb{E}(\int_0^{\tau_H} v(c_t) dt)$.

de Ramsey dépend intrinsèquement de β , ce qui correspond à la dépendance en l'horizon T_H de notre formulation rétrograde.

2.2. Règle de Ramsey et dynamique de la courbe des taux

2.2.1. La règle de Ramsey. —

2.2.1.1. La règle de Ramsey en économie. — La littérature économique s'est beaucoup penchée sur la modélisation des taux d'intérêt long terme, en modélisant un taux d'actualisation d'équilibre (que l'on notera R^e) fonction du taux de préférence pour le présent β et du taux de croissance de l'économie g . L'exemple de référence est la règle de Ramsey ([75], 1928) : l'économie est représentée par un agent représentatif adverse au risque, dont l'utilité de la consommation est une fonction $v(t, c)$. La règle de Ramsey repose sur une approche équilibre et relie en $t = 0$ le taux d'équilibre pour une maturité T avec l'utilité marginale $v_c(t, c)$ de la consommation optimale aléatoire C^e

$$(2.10) \quad R_0^e(T) = -\frac{1}{T} \ln \frac{\mathbb{E}[v_c(T, C_T^e)]}{v_c(c)}.$$

Le cadre usuel est de prendre une fonction d'utilité séparable en temps avec décroissance exponentielle au taux $\beta > 0$ et une aversion au risque constante θ , ($0 < \theta < 1$), c'est-à-dire $v(t, c) = K e^{-\beta t} \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}$. La consommation optimale est exogène et modélisée par un mouvement brownien géométrique $c_t^* = c_0 \exp((g - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t)$. La règle de Ramsey implique une courbe de taux plate

$$(2.11) \quad R_0^e(T) = \beta + \theta g - \frac{1}{2}\theta(\theta + 1)\sigma^2.$$

La règle de Ramsey est toujours l'équation de référence et, même si elle a été étendue à un cadre plus réaliste et fut discutée par de nombreux économistes comme Gollier [35, 34, 38, 37, 39, 36] et Weitzman [78], certaines questions restent en suspens, comme par exemple la cohérence temporelle des choix (i.e. le fait que le simple passage du temps peut changer la décision optimale).

Les utilités progressives permettent de répondre à ce problème de consistance en temps. De plus, en présence d'incertitude long terme, il est important que le schéma de décision puisse évoluer en fonction des nouvelles connaissances et expériences, ce qui permet en outre de traiter des situations où l'essentiel est de trouver un noyau d'accord entre partenaires ayant des anticipations différentes, afin de laisser du temps à la résolution de leurs controverses.

Dans la suite, nous adoptons un point de vue financier : le marché financier incomplet est celui décrit en Section 2.1.1, avec un mouvement brownien W , un taux court (exogène) (r_t) et une prime de risque (η_t^R) . Nous considérons la formulation soit progressive soit rétrograde du problème d'optimisation.

2.2.1.2. Utilité marginale de la consommation et processus prix d'états

. — (i) FORMULATION PROGRESSIVE

La proposition 2.1.5 donne une relation trajectorielle entre l'utilité marginale de la consommation optimale et le processus prix d'état optimal, paramétrisé par la richesse initiale x , ou de façon équivalente par c ou y (puisque $c = -\tilde{v}_y(u_x(x)) = -\tilde{v}_y(y)$, où $v(\cdot) = V(0, \cdot)$),

$$(2.12) \quad V_c(t, C_t^*(c)) = Y_t^*(y), \quad t \geq 0 \quad \text{avec} \quad v_c(c) = y.$$

La formulation progressive met l'accent sur la monotonie de Y par rapport à sa condition initiale y , (sous des hypothèses de régularité c.f. [22]). En tant que fonction de y , c est décroissante et $C_t^*(c)$ est une fonction croissante de c . Cette question de monotonie est fréquemment omise, peut être parce qu'avec les utilités puissance (exemple très souvent utilisé dans la littérature) $Y^*(y)$ est linéaire en y (puisque ν^* ne dépend pas de y). Ceci sera discuté dans la Section 2.3.3.

(ii) FORMULATION RÉTROGRADE

Dans le problème d'optimisation classique, les fonctions d'utilités de la consommation et de la richesse terminale sont déterministes, et un horizon T_H est fixé. Cette formulation étant rétrograde, les processus optimaux dépendent de l'horizon T_H : on les note avec l'indice H pour rappeler cette dépendance. Néanmoins la relation trajectorielle (2.12) de la formulation progressive reste valide

$$(2.13) \quad \frac{V_c(t, C_t^{*,H}(c))}{v_c(c)} = \frac{Y_t^{*,H}(y)}{y}, \quad 0 \leq t \leq T_H \quad \text{with} \quad v_c(c) = y.$$

Conclusion : Grâce à la relation trajectorielle (2.12), la règle de Ramsey donne une description du taux d'intérêt d'équilibre comme fonction du processus prix d'état optimal $Y^{*,e}$, $R_0^e(T)(y) = -\frac{1}{T} \ln \mathbb{E}[Y_T^{*,e}(y)/y]$, ce qui permet de donner une interprétation financière en termes de zéro-coupons. De façon plus dynamique, $\forall t < T$,

$$(2.14) \quad R_t^e(T)(y) := -\frac{1}{T-t} \ln \mathbb{E} \left[\frac{V_c(T, C_T^{*,e}(c))}{V_c(t, C_t^{*,e}(c))} \middle| \mathcal{F}_t \right] = -\frac{1}{T-t} \ln \mathbb{E} \left[\frac{Y_T^{*,e}(y)}{Y_t^{*,e}(y)} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Nous donnons maintenant un lien entre le point de vue économique et le point de vue financier, grâce au processus prix d'état et aux règles de *pricing*.

2.2.2. Dynamique de la courbe des taux de marché. — En finance, la courbe des taux de marché est définie à partir des prix des zéro-coupons : soit $(B^m(t, T), t \leq T)$ (m pour marché) le prix en t d'un zéro-coupon payant une unité de *cash* en T , la courbe des taux est alors donnée par la relation $B^m(t, T) = \exp(-R_t^m(T)(T - t))$.

Il s'agit maintenant de donner une interprétation financière de $\mathbb{E}\left[\frac{Y_T^*(y)}{Y_t^*(y)}|\mathcal{F}_t\right]$ pour $t \leq T$, en termes de prix de zéro-coupons.

2.2.2.1. Zéro-coupon répliquable. — Si les zéro-coupons sont répliquables, leur prix est évalué sous la probabilité risque neutre minimale \mathbb{Q}

$$B^m(t, T) = \mathbb{E}\left[\frac{Y_T^0}{Y_t^0}|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds}|\mathcal{F}_t]$$

Remarquons que quelque soit le prix d'état Y (avec de bonnes propriétés d'intégrabilité) $B^m(t, T) = \mathbb{E}\left[\frac{Y_T(y)}{Y_t(y)}|\mathcal{F}_t\right]$.

2.2.2.2. Zéro-coupon non répliquable. — Pour un zéro-coupon qui n'est pas répliquable, le prix d'indifférence permet d'évaluer le risque provenant de l'imperfection de couverture. Le *prix d'indifférence* d'un produit financier ζ_{T_H} délivré en T_H est la quantité de *cash* pour laquelle l'investisseur est indifférent entre vendre (ou acheter) une certaine quantité du produit financier, ou pas. Cette règle de prix est non linéaire et fournit un bid-ask spread, souvent difficilement calculable explicitement. Si les investisseurs sont conscients de leur sensibilité à ce risque non répliquable, ils peuvent faire des transactions pour des petits nominaux. Dans ce cas, le prix correspond au *prix d'indifférence d'utilité marginale* (aussi appelé *prix de Davis* [18]) : considérons les deux problèmes d'optimisation suivant (avec et sans ζ_{T_H}) pour $t \leq T_H$,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^\zeta(t, x, q) &:= \sup_{(\kappa, c) \in \mathcal{X}^c(t, x)} \mathbb{E}[U(T_H, X_{T_H}^\kappa + q \zeta_{T_H}) + \int_t^{T_H} V(s, c_s) ds | \mathcal{F}_t], \\ \mathcal{U}(t, x) &:= \sup_{(\kappa, c) \in \mathcal{X}^c(t, x)} \mathbb{E}[U(T_H, X_{T_H}^\kappa) + \int_t^{T_H} V(s, c_s) ds | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

alors le prix d'indifférence d'utilité marginale est le processus \mathbb{F} -adapté $(p_t^u(x))_{t \in [0, T_H]}$ déterminé à chaque instant t par la relation non linéaire

$$\partial_q \mathcal{U}^\zeta(t, x, q)|_{q=0} = \partial_q \mathcal{U}(t, x + qp_t^u(x))|_{q=0}, \quad \forall t \in [0, T_H].$$

(i) Pour un produit financier ζ_{T_H} délivré en T_H ,

$$p_t^u(x, \zeta_{T_H}) = \mathbb{E}[\zeta_{T_H} \frac{Y_{T_H}^*(t, y)}{y} | \mathcal{F}_t], \quad y = \mathcal{U}_x(t, x).$$

(ii) Dans la formulation progressive, cette règle peut être définie pour n'importe quelle maturité $T \leq T_H$ et elle est consistante en temps,

$$p_t^u(x, \zeta_{T_H}) = p_t^u(x, \zeta_T(t, x)) \quad \text{avec} \quad \zeta_T(t, x) = p_T^u(X_T^*(t, x), \zeta_{T_H}).$$

(iii) Dans la formulation rétrograde, pour un produit financier ζ_T délivré en $T < T_H$, ζ_T peut être considéré comme le prix en T de n'importe quelle stratégie admissible partant de ζ_T en T et de richesse terminale $X_{T_H}(T, \zeta_T) = \zeta_{T_H}$.

$$p_t^{u,H}(x, \zeta_T) = p_t^{u,H}(x, \zeta_{T_H}) = \mathbb{E}[\zeta_{T_H} \frac{Y_{T_H}^{*,H}(t, y)}{y} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\zeta_T \frac{Y_T^{*,H}(t, y)}{y} | \mathcal{F}_t].$$

Ainsi cette règle de *pricing* est bien définie car elle ne dépend pas de l'extension admissible de ζ_T entre T et T_H .

Soit $B^u(t, T)$ (u pour utilité) le prix d'indifférence d'utilité marginale en t d'un zéro-coupon bond de maturité T : $B^u(t, T) = B_t^u(T, y) = \mathbb{E}[\frac{Y_T^*(y)}{Y_t^*(y)} | \mathcal{F}_t]$. Ainsi (2.15)

$$B_t^u(T, y) := B^u(t, T)(y) = \mathbb{E}[\frac{Y_T^*(y)}{Y_t^*(y)} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\frac{V_c(T, C_T^*(c))}{V_c(t, C_t^*(c))} | \mathcal{F}_t], \quad v_c(c) = y.$$

et d'après la règle de Ramsey (2.14), le taux d'intérêt à l'équilibre R^e coïncide avec la courbe des taux R^u ($R_t^u(T, y) = -\frac{1}{T-t} \ln B_t^u(T, y)$) donnée par le prix d'indifférence d'utilité marginale. Néanmoins cette courbe est robuste seulement pour des petites transactions.

$Y_t^*(y)B_t^u(T, y)$ étant martingale, le zéro-coupon de maturité T a la dynamique

$$(2.16) \quad \frac{dB_t^u(T, y)}{B_t^u(T, y)} = r_t dt + \Gamma_t(T, y) \cdot (dW_t + (\eta_t^{\mathcal{R}} - \nu_t^*(y))dt)$$

où $\Gamma_t(T, y)$ est le vecteur volatilité. La martingale $Y_t^*(y)B_t^u(T, y)$ peut s'écrire comme une martingale exponentielle de volatilité $(\nu_t^*(y) - \eta_t^{\mathcal{R}} + \Gamma_t(T, y))$.

Puisque $B_T^u(T, y) = 1$, $Y_T^*(y)$ peut s'écrire de deux façons différentes

$$Y_T^*(y) = B_0^u(T, y) \mathcal{E}(\int_0^T (\nu_s^*(y) - \eta_s^{\mathcal{R}} + \Gamma_s(T, y)) \cdot dW_s) = y e^{-\int_0^T r_s ds} \mathcal{E}(\int_0^T (\nu_s^*(y) - \eta_s^{\mathcal{R}}) dW_s).$$

En prenant le logarithme

$$(2.17) \quad \int_0^T r_s ds = TR_0^u(T) - \int_0^T \Gamma_t(T, y) \cdot (dW_t + (\eta_t - \nu_t^*(y))dt) + \int_0^T \frac{1}{2} \|\Gamma_t(T, y)\|^2 dt.$$

Si la famille $\Gamma_t(T, y)$ est différentiable en la maturité T , on retrouve le cadre classique de Heath Jarrow Morton [41] avec la dynamique pour le taux court

$$r_t = f_0(t, y) - \int_0^t \partial_T \Gamma_s(t, y) \cdot (dW_s + (\eta_s - \nu_s^*(y))ds) + \frac{1}{2} \partial_t \|\Gamma_s(t, y)\|^2 ds$$

où $f_0(\cdot, y)$ est le taux court forward : $f_0(t, y) = -\partial_t(tR_0^u(t, y))$.

2.2.3. Courbe des taux de maturité infinie avec utilités progressives. — On considère la courbe des taux pour un maturité infinie $l_t^u(y) := \lim_{T \rightarrow +\infty} R_t^u(T, y)$. D'après (2.16)

$$\begin{aligned} R_t^u(T, y) &= \frac{T}{T-t} R_0^u(T, y) - \frac{1}{T-t} \int_0^t r_s ds - \int_0^t \frac{\Gamma_s(T, y)}{T-t} dW_s \\ &\quad + \int_0^t \frac{\|\Gamma_s(T, y)\|^2}{2(T-t)} ds + \int_0^t \left\langle \frac{\Gamma_s(T, y)}{T-t}, \nu_s^* - \eta_s^{\mathcal{R}} \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Suivant Dybvig [20] et El Karoui et al.. [26], $l_t^u(y)$ se comporte différemment en fonction du comportement à long terme de la volatilité

- Si $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_t(T, y)}{T-t} \neq 0$, p.s., alors $\frac{\|\Gamma_t(T, y)\|^2}{T-t} \rightarrow \infty$ p.s et $l_t(y)$ est infinie.
- Sinon, $l_t = l_0 + \int_0^t \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\|\Gamma_s(T, y)\|^2}{2(T-s)} \right) ds$, et l_t est un processus croissant, constant en t et ω si $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\|\Gamma_t(T, y)\|^2}{T-t} = 0$.

Dans ce dernier cas, qui est la situation considérée par les économistes, les courbes des taux passées, présentes et futures ont les mêmes asymptotes.

2.3. Utilités puissances

Nous étudions maintenant plus particulièrement le cas des utilités puissances, puisque d'une part ce sont les utilités utilisées dans la littérature économique, et d'autre part elles permettent des calculs explicites.

Une utilité progressive puissance consistante (de coefficient d'aversion au risque θ) est une paire nécessairement de la forme

$$U^{(\theta)}(t, x) = Z_t \frac{x^{1-\theta}}{1-\theta}, \quad V^{(\theta)}(t, x) = (\psi_t)^\theta U^{(\theta)}(t, x)$$

où Z et ψ sont des semimartingales qui permettent de satisfaire la propriété de consistance. On rappelle que les processus optimaux sont linéaires en leur condition initiale, i.e. $X_t^*(x) = xX_t^*$, $Y_t^*(y) = yY_t^*$ et $C_t^*(c) = c\psi_t$. Le coefficient Z_t est déterminé via les processus optimaux X^*, Y^* par $Z_t = Y_t^*(X_t^*)^\theta$, et le coefficient ψ_t est seulement supposé positif. Les dynamiques de X^* et Y^* sont données par

$$\begin{aligned} dX_t^* &= X_t^* \left((r_t - \psi_t)dt + \kappa_t^* \cdot (dW_t + \eta_t^{\mathcal{R}}) \right), \\ dY_t^* &= Y_t^* \left(-r_t dt + (\nu_t^* - \eta_t^{\mathcal{R}}) \cdot dW_t \right). \end{aligned}$$

Dans la formulation rétrograde d'une utilité puissance "classique", la fonction valeur est une utilité progressive puissance consistante avec une valeur déterministe à maturité T_H , et les processus optimaux $Y^{*,H}$ and $X^{*,H}$ satisfont en T_H

$$Y_{T_H}^{*,H} (X_{T_H}^{*,H})^\theta = C. \quad p.s. \quad \text{ou de façon équivalente} \quad Y_{T_H}^{*,H} X_{T_H}^{*,H} = C (X_{T_H}^{*,H})^{1-\theta}.$$

2.3.1. Exemple d'un marché log-normal, formulation rétrograde. —

On suppose un marché log-normal où tous les paramètres de marché sont déterministes :

- (i) $\eta^{\mathcal{R}}$ processus déterministe
- (ii) $(\int_0^t r_s ds)_{0 \leq t \leq T_H}$ processus gaussien, avec une volatilité déterministe $\Gamma_\cdot(t)$, ainsi $\ln(Y^0)$ est un processus gaussien et

$$(2.18) \quad -\int_0^t r_s ds = \text{Cst}(t) + \int_0^t \Gamma_s(t) \cdot dW_s, \quad t \in [0, T_H].$$

- (iii) $\nu^{*,H}$ processus déterministe, donc $\ln(X^{*,H})$ et $\ln(Y^{*,H})$ sont des processus gaussiens. En particulier en T_H

$$\begin{aligned} \ln(Y_{T_H}^{*,H}) &= \text{Cst} - \int_0^{T_H} r_t dt + \int_0^{T_H} (\nu_t^{*,H} - \eta_t^{\mathcal{R}}) \cdot dW_t \\ \ln(X_{T_H}^{*,H}) &= \text{Cst} + \int_0^{T_H} r_t dt + \int_0^{T_H} \kappa_t^* \cdot dW_t. \end{aligned}$$

Puisque $Y_{T_H}^{*,H} (X_{T_H}^{*,H})^\alpha$ est constant, la variable gaussienne $(1-\theta) \int_0^{T_H} \Gamma_t(T_H) \cdot dW_t + \int_0^{T_H} (\nu_t^{*,H} - \eta_t^{\mathcal{R}}) \cdot dW_t + \int_0^{T_H} \theta \kappa_t^{*,H} \cdot dW_t$ a une variance nulle, ce qui implique, en décomposant $\Gamma_t(T_H)$ en deux vecteurs orthogonaux $\Gamma_t^{\mathcal{R}}(T_H)$ et $\Gamma_t^\perp(T_H)$,

$$(2.19) \quad \nu_t^{*,H} = -(1-\theta)\Gamma_t^\perp(T_H), \quad \theta \kappa_t^{*,H} + (1-\theta)\Gamma_t^{\mathcal{R}}(T_H) = \eta_t^{\mathcal{R}}.$$

Ainsi la connaissance de la prime de risque $\eta^{\mathcal{R}}$ et des paramètres optimaux $\nu^{*,H}$, $\kappa^{*,H}$ permet d'identifier la volatilité du prix d'utilité marginal du zéro-coupon de maturité T_H

$$(2.20) \quad \Gamma_t(T_H) = \frac{(\eta_t^{\mathcal{R}} - \nu_t^{*,H})}{(1 - \theta)} - \frac{\theta}{1 - \theta} \kappa_t^{*,H}.$$

Un modèle classique pour la dynamique du taux court est le modèle de Vasicek, pour lequel le taux court est donné par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck $dr_t = a(b - r_t)dt - \sigma dW_t$. Le calcul de la volatilité des zéro-coupons est alors explicite $\Gamma_s(t) = (1 - e^{-a(t-s)})\frac{\sigma}{a}$. Le cadre classique consiste en un marché complet généré par un mouvement brownien unidimensionnel. Dans le cas d'un marché incomplet dont l'aléa dirigeant le taux court est orthogonal à l'aléa dirigeant les actifs risqués, alors $\Gamma_s^\perp(t) = (1 - e^{-a(t-s)})\frac{\sigma}{a}$ et $\Gamma^{\mathcal{R}} = 0$. Ainsi dans cet exemple $\kappa_t^{*,H} = \frac{\eta_t^{\mathcal{R}}}{\alpha}$ ne dépend pas de la maturité T_H alors que $\nu_t^{*,H} = (\theta - 1)(1 - e^{-a(T_H-t)})\frac{\sigma}{a}$ dépend du temps restant jusqu'à maturité $(T_H - t)$.

• *Courbe des taux pour maturité infinie, formulation rétrograde* Puisque dans la formulation rétrograde $\nu^{*,H}$ dépend de la maturité T_H , la courbe des taux pour une maturité infinie $l_t = \lim_{T \rightarrow +\infty} R_t^u(T)$ diffère de celle du cas progressif (cf. (2.2.3)) si $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\|\Gamma_t(T)\|^2}{T-t} > 0$ et $\theta < \frac{1}{2}$. On fixe $T_H = T \rightarrow +\infty$ (on obtient des résultats similaires si $T_H > T \rightarrow +\infty$) et

$$\begin{aligned} l_t &= l_0 + \int_0^t \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{\|\Gamma_s(T)\|^2}{2(T-s)} - (1 - \theta) \frac{\|\Gamma_s^\perp(T)\|^2}{(T-s)} \right) ds \\ l_t &= l_0 + \int_0^t \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{(2\theta - 1)\|\Gamma_s^\perp(T)\|^2}{2(T-s)} + \frac{\|\Gamma_s^{\mathcal{R}}(T)\|^2}{2(T-s)} \right) ds \end{aligned}$$

Donc si $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\|\Gamma_t(T)\|^2}{T-t} > 0$, l_t est une fonction croissante de l'aversion au risque θ : si $\theta \geq \frac{1}{2}$, l_t est un processus croissant comme dans le cas progressif, mais si $\theta < 1/2$, l_t n'est pas nécessairement monotone.

2.3.2. Exemple d'un modèle affine. — Le modèle à facteurs affines permet, tout en généralisant le modèle log-normal, de produire des formules de *pricing* calculables. Nous référons à Teichmann et coauteurs [67], [66] pour une discussion sur les contraintes des modèles affines dans un cadre multidimensionnel, et à l'ouvrage de Piazzesi [64] pour une étude détaillée sur les modèles affines de structure de taux d'intérêt.

Soit ξ le facteur N -dimensionnel, supposé un processus de diffusion affine,

c'est-à-dire tel que le drift et la matrice de variance-covariance sont des fonctions affines de ξ :

$$(2.21) \quad d\xi_t = \delta_t(\xi_t)dt + \sigma_t(\xi_t).dW_t$$

La contrainte affine s'exprime ainsi :

- $\delta_t(\xi_t) = \varrho_t^\delta \xi_t + \delta_t^0$, avec $\varrho_t^\delta \in \mathbb{R}^{N \times N}$ et $\delta_t^0 \in \mathbb{R}^N$ déterministes.
- $\sigma_t(\xi_t) = \Theta_t s_t(\xi_t)$, avec $\Theta_t \in \mathbb{R}^{N \times N}$ déterministe, la matrice $N \times N$ $s_t(\xi_t)$ diagonale de valeurs propres $s_{ii,t}(\xi_t)$. La propriété affine concerne la matrice de variance-covariance $\Theta_t s_t(\xi_t) \tilde{s}_t(\xi_t) \tilde{\Theta}_t$ c'est-à-dire $\lambda_{i,t} = s_{ii,t}^2(\xi_t) = \tilde{\rho}_{i,t}^\lambda \xi_t + \lambda_{i,t}^0$ avec $(\lambda_{i,t}^0, \tilde{\rho}_{i,t}^\lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ déterministes (la notation $\tilde{\cdot}$ est pour la transposition d'un vecteur ou d'une matrice).

2.3.2.1. Caractérisation d'un marché avec processus optimaux affines. — Afin d'être cohérent avec le modèle de marché précédent (Section 2.1.1), nous définissons l'ensemble des stratégies admissibles \mathcal{R}_t en t , et son orthogonal \mathcal{R}_t^\perp .

$$\mathcal{R}_t(\xi_t) = \{\tilde{a}_t \Theta_t s_t(\xi_t), a_t \text{ vecteur progressif à valeurs dans un espace linéaire déterministe } E_t \subset \mathbb{R}^N\}$$

On suppose E_t et son orthogonal stables par $\tilde{\Theta}_t$ (une matrice Θ_t définie par blocs vérifie cette hypothèse). Les notations $a_t^{\mathcal{R}}$ et a_t^\perp représentent des éléments de E_t et E_t^\perp respectivement. On considère les deux hypothèses suivantes :

- (i) Le taux court (r_t) et le taux de consommation (ζ_t) sont des processus affines positifs

$$r_t = a_t^r \xi_t + b_t^r \quad \text{et} \quad \zeta_t = a_t^\zeta \xi_t + b_t^\zeta.$$

- (ii) Les volatilités des processus optimaux X^* et Y^* ont une structure affine,

$$(2.22) \quad \kappa_t^* = \tilde{a}_t^{X,\mathcal{R}} \Theta_t s_t(\xi), \quad \eta_t^{\mathcal{R}} = \tilde{a}_t^{Y,\mathcal{R}} \Theta_t s_t(\xi), \quad \nu_t^* = \tilde{a}_t^{Y,\perp} \Theta_t s_t(\xi), (a^{\cdot,\mathcal{R}} \in E_t \text{ et } a^{\cdot,\perp} \in E_t^\perp).$$

Equations de Ricatti Nous fixons maintenant quelques notations et développons quelques calculs utiles pour l'étude de processus exponentiel affine. Si $f(t, \xi) = \tilde{a}_t \xi + b_t$ est une fonction affine, il est parfois utile d'écrire $b_t = f_t(0) = f_t^0$ and $a_t = \nabla_\xi f_t(0) = \nabla f_t^0$.

Lemme 2.3.1. — Soient $a_t \in \mathbb{R}^N$ et $b_t \in \mathbb{R}$ deux fonctions déterministes.

- (i) Le processus affine $\tilde{a}_t \xi_t + b_t$ est une semimartingale de décomposition,

$$d(\tilde{a}_t \xi_t + b_t) = \tilde{a}_t \Theta_t s_t(\xi).dW_t - \frac{1}{2} \|\tilde{a}_t \Theta_t s_t(\xi)\|^2 dt + f_t(a_t, \xi_t) dt$$

a) La variation quadratique $\|\tilde{a}_t \Theta_t s_t(\xi)\|^2 = q_t(a, \xi)$ est quadratique en a et affine en ξ : si Θ_t^i est la i -ème colonne de la matrice Θ_t

$$q_t(a, \xi) = \nabla q_t^0(a) \xi + q_t^0(a), \text{ avec } \nabla q_t^0(a) = \sum_{i=1}^N (\tilde{\Theta}_t^i a_t)^2 \rho_{i,t}^\lambda, \text{ et } q_t^0(a) = \sum_{i=1}^N (\tilde{\Theta}_t^i a_t)^2 \lambda_{i,t}^0$$

b) Le drift $f_t(a, \xi_t)$ est quadratique en a et affine en ξ

$$(2.23) f_t(a_t, \xi_t) = (\partial_t \tilde{a}_t + \tilde{a}_t \varrho_t^\delta + \frac{1}{2} \nabla q_t^0(a)) \xi_t + \partial_t b_t + \tilde{a}_t \delta_t^0 + \frac{1}{2} q_t^0(a)$$

(ii) Un processus $X_t = \tilde{a}_t \xi_t + b_t + \int_0^t \delta_s^X(\xi_s) ds$ ($\delta_t^X(\xi) = \nabla \delta_t^{0,X} \xi + \delta_t^{0,X}$) est le logarithme d'une martingale exponentielle si et seulement les coefficients satisfont l'équation de Ricatti

$$(2.24) \partial_t \tilde{a}_t + \tilde{a}_t \varrho_t^\delta + \frac{1}{2} \nabla q_t^0(a) + \nabla \delta_t^{0,X} = 0, \quad \partial_t b_t + \tilde{a}_t \delta_t^0 + \frac{1}{2} q_t^0(a) + \delta_t^{0,X} = 0$$

2.3.2.2. Application à l'évaluation des zéro-coupons. — Dans la formulation progressive avec des portefeuilles linéaires, le prix d'indifférence d'utilité marginale des zéro-coupons de maturité T est donné par (2.15), avec $Y_t^*(y)$ linéaire en y , donc le prix des zéro-coupons ne dépend pas de y . Ainsi

$$\begin{aligned} B_t^u(T) &= \mathbb{E}\left[\frac{Y_T^*}{Y_t^*} | \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T (a_s^r \xi_s + b_s^r) ds + \int_t^T \tilde{a}_u^Y \Theta_u s_u(\xi) \cdot dW_u - \frac{1}{2} \int_t^T \|\tilde{a}_u^Y \Theta_u s_u(\xi)\|^2 du\right) | \mathcal{F}_t\right] \end{aligned}$$

De plus, de part la structure markovienne de ξ , le prix du zéro-coupon est une fonction exponentielle affine de ξ , de condition terminale $B_T^u(T) = 1$,

$$\ln(B_t^u(T)) = \tilde{A}_t^T \xi_t + B_t^T, \quad A_T^T = 0, \quad B_T^T = 0.$$

La résolution de l'équation de Ricatti (2.24) avec n'importe quelle condition initiale $\tilde{a}_0 \xi_0 + b_0$ implique que le processus affine exponentiel $\exp(\tilde{a}_t \xi_t + b_t + \int_0^t \delta_s^X(\xi_s) ds)$ est une martingale locale.

La résolution de l'équation de Ricatti (2.24) avec condition terminale $X_T = \tilde{a}_T \xi_T + b_T + \int_0^T \delta_s^X(\xi_s) ds$ implique (sous des conditions d'intégrabilité) que si (a_t^T, b_t^T) sont solutions du système de Riccati avec condition terminale (a_T, b_T) , alors

$$\exp(X_t) = \mathbb{E}[\exp(X_T) | \mathcal{F}_t] = \exp\left(\tilde{a}_t^T \xi_t + b_t^T + \int_0^t \delta_s^X(\xi_s) ds\right).$$

Pour le *pricing* de zéro-coupons, d'après (2.25), nous considérons des processus affines $\tilde{A}_t^T \xi_t + B_t^T$ tels que (puisque $r_t = a_t^r \xi_t + b_t^r$)

$$\exp(\tilde{A}_t^T \xi_t + B_t^T) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_t^T -(a_u^r \xi_u + b_u^r) du + \tilde{a}_u^Y \Theta_u s_u(\xi) \cdot dW_u - \frac{1}{2} \|\tilde{a}_u^Y \Theta_u s_u(\xi)\|^2 du\right) | \mathcal{F}_t\right].$$

Puisque la partie martingale est celle associée au processus affine $\tilde{a}_t^Y \xi_t$, il est naturel de définir le processus affine X^Y avec drift affine tel que

$$X_t^Y = \tilde{a}_t^Y \xi_t - \int_0^t f_s(a_s^Y, \xi_s) ds = X_0^Y + \int_0^t \tilde{a}_u^Y \Theta_u s_u(\xi) \cdot dW_u - \frac{1}{2} \|\tilde{a}_u^Y \Theta_u s_u(\xi)\|^2 du$$

$f_t(a, \xi)$ étant défini par (2.23) avec $b = 0$. Puisque $\exp(X_t^Y)$ est une martingale locale, \tilde{a}_t^Y est solution de l'équation de Ricatti avec $b_t \equiv 0$. Nous nous intéressons donc au processus $X_t^T = \tilde{A}_t^T \xi_t + B_t^T$ tel que l'exponentielle de $Z_t = X_t^T + X_t^Y - \int_0^t r_s ds$ est une martingale locale.

Théorème 2.3.2. — *On suppose une structure d'optimisation affine, où le prix d'état optimal a une volatilité affine $\tilde{a}_t^Y \Theta_t s_t(\xi)$ avec \tilde{a}_t^Y solution d'une équation de Ricatti.*

- (i) *Chaque zéro-coupon est une fonction exponentielle $\exp(\tilde{A}_t^T \xi_t + B_t^T)$ telle que $\tilde{a}_t^Z = \tilde{A}_t^T + \tilde{a}_t^Y$ est solution d'une équation de Ricatti avec condition terminale \tilde{a}_T^Y , et δ^Z est la fonction $\delta_t^Z(\xi) = -f_t(a_t^Y \xi) + a_t^T \xi_t + b_t^r$.*
- (ii) *La volatilité du zéro-coupon de maturité T est $\Gamma_t(T) = \tilde{A}_t^T \Theta_t s_t(\xi)$.*

2.3.2.3. Utilités puissance et formulation rétrograde. — Dans la formulation rétrograde avec utilité puissance $\frac{x^{1-\theta}}{1-\theta}$, ($0 < \theta < 1$) et horizon T_H , la contrainte terminale entre richesse optimale et prix d'état s'écrit

$$(Y_{T_H}^{*,H})^{1/\theta} X_{T_H}^{*,H} = \text{Cst}$$

(l'indice H indique la dépendance en l'horizon T_H). Comment se propage cette contrainte au cours du temps dans un modèle affine avec un taux de consommation ζ_t^* donné? D'une part $\exp(\int_0^{T_H} \zeta_u^* du) X^{*,H} Y^{*,H}$ est une martingale de valeur terminale $\text{Cst} \exp(\int_0^{T_H} \zeta_u^* du) (Y_{T_H}^{*,H})^{1-1/\theta}$. D'autre part, par propriété de Markov $\mathbb{E}[\frac{\exp(\int_0^{T_H} \zeta_u^* du)}{\exp(\int_0^t \zeta_u^* du)} (\frac{Y_{T_H}^{*,H}}{Y_t^{*,H}})^{1-1/\theta} | \mathcal{F}_t]$ est une exponentielle affine, dont les coefficients (A^θ, B^θ) sont solutions d'une équation de Ricatti

$$\mathbb{E}[\frac{\exp(\int_0^{T_H} \zeta_u^* du)}{\exp(\int_0^t \zeta_u^* du)} (\frac{Y_{T_H}^{*,H}}{Y_t^{*,H}})^{1-1/\theta} | \mathcal{F}_t] = \exp(\tilde{A}_t^\theta \xi_t + B_t^\theta)$$

La contrainte rétrograde est donc équivalente à l'égalité pour tout $t \leq T_H$

$$X_t^{*,H} Y_t^{*,H} = \text{Cst} (Y_t^{*,H})^{1-1/\theta} \exp(\tilde{A}_t^\theta \xi_t + B_t^\theta).$$

Proposition 2.3.3. — (i) *La contrainte terminale $X_{T_H}^{*,H} = \text{Cst} \exp(\int_0^{T_H} \zeta_u^* du) (Y_{T_H}^{*,H})^{-1/\theta}$ se propage au cours du temps en la relation*

$$(2.25) \quad X_t^{*,H} = \text{Cst} (Y_t^{*,H})^{-1/\theta} \exp(\tilde{A}_t^\theta \xi_t + B_t^\theta),$$

avec $\exp(\tilde{A}_t^\theta \xi_t + B_t^\theta) = \mathbb{E} \left[\frac{\exp(\int_0^{T_H} \zeta_u^* du)}{\exp(\int_0^t \zeta_u^* du)} \left(\frac{Y_{T_H}^{*,H}}{Y_t^{*,H}} \right)^{1-1/\theta} \middle| \mathcal{F}_t \right]$.

(ii) En particulier, le fait que la volatilité κ_t^* a une structure affine appartenant à l'espace E_t , implique que $(\tilde{A}_t^\theta)^\perp = \frac{1}{\theta}(\tilde{a}_t^Y)^\perp$.

(iii) Le lien avec le zéro-coupon est donné par la relation

$$(2.26) \quad B(t, T) = \exp(\tilde{A}_t^T \xi_t + B_t^T) = \mathbb{E} \left(\frac{Y_T^{*,H}}{Y_t^{*,H}} \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

2.3.3. Courbe de taux non linéaire en les conditions initiales. —

Nous nous sommes concentrés jusqu'ici sur les utilités puissances, dont les processus optimaux $X^{*,\theta}$ et $Y^{*,\theta}$ sont linéaires en leur conditions initiales, i.e, $X^{*,\theta}(x) = xX^{*,\theta}$ et $Y^{*,\theta}(y) = yY^{*,\theta}$ ($X^{*,\theta} = X^{*,\theta}(1)$, $Y^{*,\theta} = Y^{*,\theta}(1)$). Ainsi le prix d'indifférence d'utilité marginale en t d'un zéro-coupon de maturité T ,

$$B^{(\theta)}(t, T)(y) := B^u(t, T)(y) = \mathbb{E} \left[\frac{Y_T^{*,\theta}(y)}{Y_t^{*,\theta}(y)} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

ne dépend pas de la condition initiale y . Cependant, la littérature économique insiste sur la dépendance du taux d'équilibre $R_0^e(T)$ en la consommation initiale. Nous donnons donc ici un exemple non trivial d'utilité progressive dont les processus optimaux ne sont pas linéaires mais conduisent tout de même à des formules explicites afin de pouvoir calculer le prix des zéro-coupons. L'idée de la méthode est la suivante.

Etape 1 : Engendrer des processus optimaux $(X^{*,\theta}, Y^{*,\theta}, \zeta^{*,\theta})$ associés à un système d'utilités puissances progressives consistant $(U^{(\theta)}, V^{(\theta)})$ de coefficient d'aversion au risque relative $U_x^{(\theta)}/xU_{xx}^{(\theta)} = \theta$. On définit les fonctions de "mélange" $x^{(\theta)}(x) := f(\theta/x)$, $x > 0$, $y^{(\theta)}(y) := g(\theta/y)$, $y > 0$ avec f et g des densités de probabilités sur \mathbb{R}^+ strictement décroissantes ; en particulier

$$\int_0^{+\infty} x^{(\theta)}(x) d\theta = x, \quad \forall x > 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} y^{(\theta)}(y) d\theta = y, \quad \forall y > 0.$$

Etape 2 : Définir les processus \bar{X} , \bar{Y} et $\bar{\zeta}$.

$$\begin{aligned} \bar{X}_t(x) &:= \int_0^{+\infty} x^{(\theta)}(x) X_t^{*,\theta} d\theta, \quad x > 0 \\ \bar{Y}_t(y) &:= \int_0^{+\infty} y^{(\theta)}(y) Y_t^{*,\theta} d\theta, \quad y > 0 \end{aligned}$$

\bar{X} (resp. \bar{Y}) est une richesse (resp. prix d'état) admissible, strictement croissant en sa condition initiale mais qui en dépend de façon non-linéaire. La

consommation $\bar{\zeta}$ intuitivement associée à (\bar{X}, \bar{Y}) est

$$\bar{\zeta}_t(\bar{X}_t(x)) = \int_0^{+\infty} \zeta_t^{*,\theta}(X_t^{*,\theta}(x^{(\theta)}(x)))d\theta = \int_0^{+\infty} x^{(\theta)}(x)\zeta_t^{*,\theta}(X_t^{*,\theta})d\theta$$

Ainsi $(e^{-\int_0^t \bar{\zeta}_s ds} \bar{X}_t \bar{Y}_t)$ est une martingale locale, on suppose que c'est une vraie martingale

Etape 3 : Construire un système d'utilités progressives consistant dont les processus optimaux sont $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{\zeta})$ (cf. caractérisation (2.7) du Théorème 2.1.6), partant de n'importe quelles fonctions d'utilités classiques u et v (pas nécessairement puissance)

$$\begin{cases} U(t, x) = \int_0^x \bar{Y}_t(u_x(\bar{\mathcal{X}}(t, z)))dz, \\ V(t, c) = \int_0^c \bar{Y}_t(v_c(\bar{\mathcal{C}}_t(\theta)))d\theta \end{cases}$$

avec $(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{C}})$ les flots inverses de (\bar{X}, \bar{C}) .

Courbe des taux : Ainsi le prix du zéro-coupon $B(t, T)(y)$ est un mélange des prix $B^{(\theta)}(t, T)$ (associé à l'aversion au risque θ) pondéré par $\frac{y^{(\theta)}(y)Y_t^{*,\theta}}{\int_0^{+\infty} y^{(\theta)}(y)Y_t^{*,\theta}d\theta}$

$$\begin{aligned} B(t, T)(y) &= \mathbb{E}\left[\frac{\bar{Y}_T(y)}{\bar{Y}_t(y)} \middle| \mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{\int_0^{+\infty} y^{(\theta)}(y)Y_t^{*,\theta}d\theta} \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} y^{(\theta)}(y)Y_T^{*,\theta}d\theta \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= \frac{1}{\int_0^{+\infty} y^{(\theta)}(y)Y_t^{*,\theta}d\theta} \int_0^{+\infty} y^{(\theta)}(y)Y_t^{*,\theta}B^{(\theta)}(t, T)d\theta \end{aligned}$$

2.4. Perspectives

La poursuite de ce travail sur les taux long terme consiste en l'étude de la sensibilité de ce prix par rapport à la condition initiale y , i.e. par rapport à la richesse initiale de l'économie (monotonie, convexité?). Un travail important consistera aussi à effectuer des simulations numériques, pour lesquelles nous aurons besoin de calibrer les utilités progressives.

Par ailleurs, l'étude des taux d'intérêt long terme et la lecture de la littérature économique, qui met l'accent beaucoup plus sur la consommation que sur la richesse (à la différence de l'approche financière) nous a fait réfléchir sur l'interprétation possible du taux de consommation. Dans un travail en cours [H14], nous montrons que le taux de consommation peut s'interpréter comme le taux d'accumulation de réserve. Le contexte est le suivant : l'investisseur veut se protéger contre la survenue d'un événement important qui peut avoir lieu dans le futur, à un instant aléatoire τ . Par exemple τ est l'instant d'un changement de régime de l'économie, ou d'une catastrophe

écologique, ou d'un défaut souverain. Nous construisons un nouveau marché qui propose une couverture contre le risque induit par la survenue de cet événement (que nous appellerons risque de défaut), en introduisant un actif soumis au défaut. Même s'il n'est pas encore soumis, ce travail est relativement avancé c'est pourquoi je le détaille ci dessous.

Un nouveau point de vue sur la consommation

2.4.1. L'actif soumis au défaut dans un cas d'école. — On considère tout d'abord le cas d'école suivant : les investisseurs peuvent investir (éventuellement des quantités négatives) dans le *cash* et dans l'actif soumis au défaut. La seule source d'incertitude est engendrée par le temps aléatoire τ , donc tous les paramètres sont déterministes. On suppose que la loi de τ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue : en particulier $\mathbb{P}(\tau = \theta)$ quelque soit $\theta \in \mathbb{R}^+$.

2.4.1.1. Le cas avec taux d'intérêt nul : $r = 0$. — Pour le moment on suppose $r = 0$. L'actif soumis au risque de défaut qui donne une couverture contre le risque de défaut est un *Credit Default Swap (CDS)* perpétuel, avec un saut de 1 en τ

$$(2.27) \quad M_t^{CD} = \mathbf{1}_{\tau \leq t} - \int_0^t \varphi_s \mathbf{1}_{s \leq \tau} ds.$$

φ_t est le *spread* du *CDS*. Tous les investissements sont stoppés à l'instant τ .

2.4.1.1.1. Stratégies auto-finançantes avec défaut. — On peut définir les investissements auto-finançants en *cash* et en *CDS* de deux façons différentes.

(i) La première (approche standard) consiste à définir à chaque instant $t \leq \tau$ la quantité δ_t^0 d'unités de *cash* et la quantité α_t^d d'unités de *CDS*. Ainsi la richesse correspondante $X_t^{\mathbb{D}} = \delta_t^0 + \alpha_t^d M_t^{CD}$ définie sur $[0, \tau]$ satisfait l'équation d'auto-financement

$$(2.28) \quad \forall t \leq \tau, \quad X_t^{\mathbb{D}} = \delta_t^0 + \alpha_t^d M_t^{CD}, \quad dX_t^{\mathbb{D}} = \alpha_t^d dM_t^{CD}$$

La taille du saut du portefeuille en τ , α_τ^d , caractérise la stratégie d'investissement puisque

$$(2.29) \quad X_t^{\mathbb{D}} - X_0^{\mathbb{D}} = \int_0^t \alpha_s^d dM_s^{CD} = \alpha_\tau^d \mathbf{1}_{\tau \leq t} - \int_0^{t \wedge \tau} \alpha_s^d \varphi_s ds$$

(ii) La deuxième consiste à définir la richesse souhaitée G_τ en τ . G_τ détermine le portefeuille de réplication : $\alpha_t^d = (G_t - X_t^{\mathbb{D}})$ avec pour $t < \tau$, $X_t^{\mathbb{D}}$ solution

de l'ODE linéaire de valeur initiale x

(2.30)

$$dX_s^{\mathbb{D}} = (X_s^{\mathbb{D}} - G_s) \varphi_s ds, \text{ donc } X_t^{\mathbb{D}} = X_0^{\mathbb{D}} \exp\left(\int_0^t \varphi_s ds\right) - \int_0^t \exp\left(\int_s^t \varphi_u du\right) G_s \varphi_s ds$$

Exemple : un portefeuille auto-finançant avec $G_\tau = 0$ et $x = 1$ est le processus $S_t^{CD} = \exp\left(\int_0^t \varphi_s \mathbf{1}_{s \leq \tau} ds\right) \mathbf{1}_{t < \tau}$.

2.4.1.1.2. *Couverture et Changement de Probabilité.* —

Dans un marché sans arbitrage, le prix d'un contrat répliquable est la valeur initiale du portefeuille de couverture : la construction d'un tel portefeuille repose sur l'équation (2.30)

(i) On se donne la valeur terminale ; G_τ en τ et H_T en $T < \tau$. Puisque H, φ, G sont déterministes, on peut trouver une condition initiale $X_0 = \text{Price}_0(H_T, G_\tau)$ telle que $H_T = X_0 \exp\left(\int_0^T \varphi_s ds\right) - \int_0^T \exp\left(\int_s^T \varphi_u du\right) G_s \varphi_s ds$.

$$(2.31) \text{Price}_0(H_T, G_\tau) = H_T \exp\left(-\int_0^T \varphi_s ds\right) + \int_0^T \exp\left(-\int_0^s \varphi_u du\right) G_s \varphi_s ds.$$

$$\text{Price}_t(H_T, G_\tau) = H_T \exp\left(-\int_t^T \varphi_s ds\right) + \int_t^T \exp\left(-\int_t^s \varphi_u du\right) G_s \varphi_s ds.$$

(ii) La règle de *pricing* (2.31) est une forme linéaire des cash-flows (H_T, G_τ) à maturité $T \wedge \tau$, $H_T \mathbf{1}_{T < \tau} + G_\tau \mathbf{1}_{\tau \leq T}$. Si il existe une mesure de probabilité \mathbb{Q} , appelée risque-neutre, telle que $\mathbb{Q}(\tau > t) = \exp\left(-\int_0^t \varphi_s ds\right)$ alors,

$$(2.32) \quad \text{Price}_0(H_T, G_\tau) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H_T \mathbf{1}_{T < \tau} + G_\tau \mathbf{1}_{\tau \leq T}]$$

– Si $\exp\left(-\int_0^t \varphi_s ds\right)$ est la fonction de survie $\mathbb{P}(\tau > t)$, alors la probabilité historique \mathbb{P} est risque neutre et $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(M_T^{CD}) = 0$.

– Si $\mathbb{P}(\tau > t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_s ds\right)$, $\lambda_t > 0$, le changement de probabilité \mathbb{Q} de densité $L_\tau(\varphi)$ par rapport à \mathbb{P} ,

$$(2.33) \quad L_\tau(\varphi) := \frac{\varphi_\tau}{\lambda_\tau} \exp\left(\int_0^\tau (\lambda_s - \varphi_s) ds\right)$$

est telle que $\mathbb{Q}(\tau > t) = \exp\left(-\int_0^t \varphi_s ds\right)$ et $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[M_T^{CD}] = 0$.

2.4.1.2. *Le cas avec taux d'intérêt non nul : $r \neq 0$.* — Quand $r \neq 0$, on actualise souvent les actifs. La forme additive du *CDS* (2.27) n'étant pas adaptée pour l'actualisation, on considère plutôt l'actif risqué

$$(2.34) \quad S_t^{CD} = \exp\left(\int_0^t \varphi_s \mathbf{1}_{s \leq \tau} ds\right) \mathbf{1}_{t < \tau}, \text{ avec } dS_t^{CD} = -S_{t-}^{CD} dM_t^{CD}$$

qui a une forme multiplicative, donc plus proche de la définition classique d'un actif financier. On actualise par l'actif sans risque $S_{t \wedge \tau}^0$ (arrêté en τ), on note l'actualisation par un $\tilde{\cdot}$.

$$\tilde{S}_t^{CD} = \exp(-\int_0^t r_s \mathbf{1}_{s \leq \tau} ds) \exp(\int_0^t \varphi_s \mathbf{1}_{s \leq \tau} ds) \mathbf{1}_{t < \tau} = \exp(\int_0^t (\varphi_s - r_s) \mathbf{1}_{s \leq \tau} ds) \mathbf{1}_{t < \tau}.$$

Afin d'éviter les arbitrages, on suppose que $\varphi_s > r_s$, p.s. et on définit $\tilde{\varphi}_t := \varphi_t - r_t$.

Dans le marché actualisé, la dynamique du portefeuille est

$$d\tilde{X}_t^{\mathbb{D}} = \mathbf{1}_{t \leq \tau} \beta_t d\tilde{S}_t^{CD}.$$

et la règle de prix

$$\frac{\text{Price}_t(\tilde{H}_T, \tilde{G}_\tau)}{\tilde{S}_t^0} = \tilde{H}_T \exp(-\int_t^T \tilde{\varphi}_s ds) + \int_t^T \exp(-\int_t^s \tilde{\varphi}_u du) \tilde{G}_s \tilde{\varphi}_s ds.$$

Ainsi dans le marché de départ avec défaut la dynamique du portefeuille est

$$dX_t^{\mathbb{D}} = \mathbf{1}_{t \leq \tau} [r_t X_t^{\mathbb{D}} dt + \beta_t (dS_t^{CD} - r_t S_t^{CD} dt)] = \mathbf{1}_{t \leq \tau} [r_t X_t^{\mathbb{D}} dt + (G_t - X_{t-}^{\mathbb{D}})(dM_t^{CD} + r_t dt)]$$

et la règle de prix

(2.35)

$$\text{Price}_t(H_T, G_\tau) = H_T \exp(-\int_t^T \varphi_s ds) + \int_t^T \exp(-\int_t^s \varphi_u du) G_s (\varphi_s - r_s) ds.$$

2.4.1.2.1. Point de vue dynamique. — Quelle est l'interprétation en terme de probabilité risque neutre du prix $\text{Price}_t(H_T, G_\tau)$ donné par (2.35)? La probabilité $\tilde{\mathbb{Q}}$ définie par sa densité $L_\tau(\tilde{\varphi})$ (cf. (2.33)) par rapport à \mathbb{P} est risque neutre pour les prix actualisés entre (t, τ) . En particulier $\text{Price}_0(H_T, G_\tau) = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}}[\tilde{H}_T \mathbf{1}_{T < \tau} + \tilde{G}_\tau \mathbf{1}_{\tau \leq T}]$. L'approche dynamique prend en compte le flot d'information, qui est engendré ici par le processus $(t \wedge \tau)$. On introduit donc la filtration $\mathbb{D} = (\mathcal{D}_t)_{t \geq 0}$ engendrée par le temps aléatoire τ , comme dans la section 1.1.

(i) Puisque les \mathcal{D}_t -variables aléatoires sont déterministes sur $\mathbf{1}_{t < \tau}$

$$(2.36) \quad \text{Price}_t(H_T, G_\tau) = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}}[\mathbf{1}_{T < \tau} H_T + \mathbf{1}_{\tau \leq T} G_\tau | \mathcal{D}_t]$$

(ii) (\tilde{S}_t^{CD}) est une $(\tilde{\mathbb{Q}}, \mathbb{D})$ martingale, ainsi que $(M_t^{CD} + \int_0^t r_s \mathbf{1}_{s < \tau} ds)$.

(iii) La densité du changement de probabilité $\tilde{\mathbb{Q}}$ par rapport à \mathbb{P} a pour dynamique $L_t^{\mathbb{D}} := L_t(\tilde{\varphi}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_\tau(\tilde{\varphi}) | \mathcal{D}_t]$. Sur $\{t < \tau\} : \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_\tau(\tilde{\varphi}) | \mathcal{D}_t] = \int_t^\infty \exp(-\int_t^s \lambda_s ds) L_s(\tilde{\varphi}) \lambda_s ds = \exp(-\int_0^t (\lambda_s - \tilde{\varphi}_s) ds)$. Ainsi

$$(2.37) \quad L_t^{\mathbb{D}} := (\mathbf{1}_{\tau > t} + \frac{\varphi_\tau - r_\tau}{\lambda_\tau} \mathbf{1}_{\tau \leq t}) \exp(\int_0^{t \wedge \tau} (\lambda_s - (\varphi_s - r_s)) ds)$$

2.4.1.2.2. Interprétation de l'actualisation en temps que défaut. — Soit ζ un temps aléatoire d'intensité r_t (i.e. $\mathbb{P}(\zeta > t) = \exp(\int_0^t r_s ds)$) modélisant

le défaut potentiel d'un pays. A l'instant ζ , il n'y a plus de marché ni de paiements, ainsi ζ est implicitement le plus grand instant de défaut. Pour simplifier les notations, on note par $\tilde{\tau}$ le temps aléatoire d'intensité $\tilde{\varphi}$.

(i) Le temps de défaut effectif est donc $\tau = \tilde{\tau} \wedge \zeta$, avec $\tilde{\tau}$ et ζ supposés indépendants d'intensité r et $\tilde{\varphi}$ sous une probabilité $\hat{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. L'intensité de τ est donc $\varphi_t = r_t + \tilde{\varphi}_t$.

(ii) Puisqu'aucun paiement n'est possible en ζ , $G_\tau = G_{\tilde{\tau}} \mathbf{1}_{\tilde{\tau} < \zeta}$, et la règle de prix du *cash flow* $H_T \mathbf{1}_{T < \tau} + G_\tau \mathbf{1}_{\tau \leq T}$ payé en $T \wedge \tau$ se sépare en deux parties : sur $\{\tilde{\tau} < \zeta\}$ et son complémentaire.

(iii) D'après (2.36), le prix en $t < \tau$ du premier terme est

$$\text{Price}_t(H_T, 0) = H_T \exp\left(-\int_t^T \varphi_s ds\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(H_T \mathbf{1}_{T < \tau} | \mathcal{D}_t),$$

avec \mathbb{Q} la probabilité de densité $L_T(\varphi)$, restriction de $\hat{\mathbb{Q}}$ à \mathcal{D}_T .

(iv) Le prix en $t < \tau$ du second terme est

$$\begin{aligned} \text{Price}_t(0, G) &= \text{Price}_t(0, G_\tau \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\} \cap \{\tau < \zeta\}}) = \int_t^T \exp\left(-\int_t^s \varphi_u du\right) G_s \tilde{\varphi}_s ds \\ (2.38) \quad &= \int_t^T \exp\left(-\int_t^s \varphi_u du\right) G_s \frac{\tilde{\varphi}_s}{\varphi_s} \varphi_s ds = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(G_\tau \mathbf{1}_{\tau < T} \frac{\tilde{\varphi}_\tau}{\varphi_\tau} | \mathcal{D}_t). \end{aligned}$$

A noter que l'événement $\{\tau = \tilde{\tau}\}$ n'est pas \mathcal{D}_τ -mesurable, il faut donc le projeter sur \mathcal{D}_τ . Or $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}_{\{\tau = \tilde{\tau}\}} | \tau) = \frac{\tilde{\varphi}_\tau}{\varphi_\tau}$, et la formule de *pricing* est cohérente avec ou sans actualisation en considérant la probabilité \mathbb{Q} associée à $\tau = \tilde{\tau} \wedge \zeta$, sachant que $G_\zeta = 0$:

$$(2.39) \quad \text{Price}_t(H_T, G_\tau) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{T < \tau} H_T + \mathbf{1}_{\tau \leq T} G_\tau | \mathcal{D}_t\right], \quad t < \tau$$

2.4.2. Le marché avec défaut. — On définit le marché avec défaut, ou \mathbb{G} -marché, qui prend en compte le \mathbb{F} -marché standard sans défaut et le temps aléatoire τ . Le *spread* φ du *CDS* est maintenant un processus stochastique, \mathbb{F} -adapté.

L'information est engendrée par les prix des actifs S^0 , S et de l'actif soumis au défaut S^{CD} , ainsi la filtration \mathbb{G} du marché avec défaut est la version continue à droite et complète de la filtration \mathbb{F} augmentée de la filtration \mathbb{D} associée au processus $(\tau \wedge t)$. Toute variable aléatoire Ψ_t^G observable en t s'écrit $\Psi_t^G = \hat{\Psi}_t \mathbf{1}_{t < \tau} + \Psi_t(\tau) \mathbf{1}_{\tau \leq t}$, avec $\hat{\Psi}_t$ \mathcal{F}_t -mesurable et $\Psi_t(\theta)$ $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ -mesurable.

2.4.2.1. Stratégies auto-finançantes avec défaut. — Un portefeuille auto-finançant du \mathbb{G} -marché est la somme d'un portefeuille auto-finançant du \mathbb{F} -marché et un portefeuille auto-finançant du \mathbb{D} -marché (défini en Section

2.4.1), l'investissement en *cash* étant séparé en 2 parties, l'une investie dans le \mathbb{F} -marché et l'autre dans le \mathbb{D} -marché.

En $t \leq \tau$ l'agent investit δ_t unités d'actifs du \mathbb{F} -marché, δ_t^0 d'actifs sans risques et α_t d'actif soumis au défaut ($(\delta_t)_{t \geq 0}, (\delta_t^0)_{t \geq 0}, (\alpha_t)_{t \geq 0}$ processus \mathbb{G} -prévisibles). Tous les investissements sont arrêtés en τ . La richesse correspondante est $X_t^{\mathbb{G}} = \delta_t S_t + \delta_t^0 S_t^0 + \alpha_t S_t^{CD}$ ($t \leq \tau$) de dynamique (auto-financement)

$$(2.40) \quad dX_t^{\mathbb{G}} = \mathbf{1}_{t \leq \tau} (\delta_t dS_t + \delta_t^0 dS_t^0 + \alpha_t dS_t^{CD})$$

Le processus richesse $X_t^{\mathbb{G}}$ a un saut en τ . Si l'agent veut obtenir G_τ en τ , il doit investir $\alpha_t = -\frac{(G_\tau - X_{t-}^{\mathbb{G}})}{S_{t-}^{CD}}$ dans l'actif soumis au défaut à tout instant t . Comme dans la définition 2.1.1, toute stratégie est arrêtée à la banqueroute de l'investisseur (quand le processus richesse atteint 0).

2.4.2.2. Probabilité risque neutre du marché avec défaut. — Nous donnons des conditions suffisantes qui garantissent que la réunion du \mathbb{F} -marché et du \mathbb{D} -marché reste sans arbitrage.

(i) D'une part, une condition triviale est de supposer τ indépendant de la filtration \mathbb{F} . Cela peut être le cas par exemple d'un risque écologique, dont la prévision est indépendante du \mathbb{F} -marché. Dans ce cas, $\mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{F}_\infty) = e^{-\int_0^t \lambda_s ds}$ est déterministe.

(ii) D'autre part, on ne peut pas supposer τ complètement dépendant de \mathbb{F} , car cela conduirait trivialement à des arbitrages dans le \mathbb{G} -marché. Supposer $\mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{F}_\infty)$ \mathcal{F}_t -adapté suffit à assurer que les \mathbb{F} -martingales restent des \mathbb{G} -martingales et à exclure les opportunités d'arbitrage dans le \mathbb{G} -marché. Nous travaillerons donc sous l'hypothèse (H), usuelle dans la littérature sur le crédit, (et qui peut modéliser un défaut souverain) :

Hypothèse (H) La (\mathbb{P}, \mathbb{F}) -intensité de τ , notée λ_t , est un processus positif \mathbb{F} -adapté tel que

$$(2.41) \quad \mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{F}_\infty) = \mathbb{P}(\tau > t | \mathcal{F}_t) = e^{-\int_0^t \lambda_s ds}.$$

On note $\Lambda_{t,T} := \int_t^T \lambda_s ds$. Sous l'hypothèse (H), toute probabilité risque neutre $\mathbb{Q}^{\mathbb{F}} = L^{\mathbb{F}} \mathbb{P}$ du \mathbb{F} -marché induit une probabilité risque neutre $\mathbb{Q}^{\mathbb{G}} = L^{\mathbb{G}} \mathbb{P}$ sur le \mathbb{G} -marché avec

$$(2.42) \quad L_t^{\mathbb{G}} := L_t^{\mathbb{D}} L_t^{\mathbb{F}} = L_t^{\mathbb{F}} (\mathbf{1}_{\tau > t} + \frac{\varphi_\tau - r_\tau}{\lambda_\tau} \mathbf{1}_{\tau \leq t}) \exp(\int_0^{t \wedge \tau} (\lambda_s - (\varphi_s - r_s)) ds).$$

Si le \mathbb{F} -marché est complet, alors les processus densité $L_t^{\mathbb{F}}$ sur \mathbb{F} et $L_t^{\mathbb{G}}$ sur \mathbb{G} sont uniques. Par suite le \mathbb{G} -marché est complet et quelque soit (Z_t) une $(\mathbb{G}, \mathbb{Q}^{\mathbb{G}})$ -martingale locale il existe (δ_t) et (α_t) processus \mathbb{G} -prévisibles tels que

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \delta_u d\tilde{S}_u + \int_0^t \alpha_u d\tilde{S}_u^{CD}.$$

2.4.3. Interprétation des \mathbb{G} -portefeuilles auto-finançants. — Nous donnons ici une interprétation des stratégies auto-finançantes du \mathbb{G} -marché, en terme de \mathbb{F} -marché. Pour ce faire, il est judicieux de réécrire la condition d'auto-financement (2.40) en terme de fraction de richesse $\pi_t = \frac{\delta_t S_t}{X_t}$ investie dans les actifs risqués, puisque cette quantité sera la même dans l'analogie \mathbb{F}/\mathbb{G} -marché. On suppose que la filtration \mathbb{F} est brownienne et que les actifs ont une dynamique brownienne géométrique avec matrice de volatilité (σ_t) . On note $\kappa_t := \pi_t \sigma_t$ et $\Phi_{0,t} := \int_0^t \varphi_s ds$.

Proposition 2.4.1. — *Il y a équivalence entre stratégies \mathbb{G} -auto-finançantes et stratégies \mathbb{F} -auto-finançantes avec consommation, pour $t < \tau$:*

- \mathbb{G} -stratégies : (π_t) sur les actifs risqués de base, $\alpha_t = -\frac{(G_t - X_t^{\mathbb{G}})}{S_{t-}^{CD}}$ sur l'actif soumis au défaut, induisant la richesse $X_t^{\mathbb{G}}$ sur $[0, \tau]$.
- \mathbb{F} -stratégies : (π_t) sur les actifs risqués, taux de consommation $C_t = e^{-\Phi_{0,t}} G_t \varphi_t$, induisant la richesse $X_t^{\mathbb{F},C} = e^{-\Phi_{0,t}} X_t^{\mathbb{G}}$.

Ainsi la consommation du \mathbb{F} -marché s'interprète en tant que réserves qui sont utilisées en cas de survenue de l'événement τ . Les quantités du \mathbb{F} -marché sont recapitalisées par $e^{\Phi_{0,t}}$, le taux de recapitalisation étant dépendant de l'intensité de défaut (l'intensité de défaut sous $\mathbb{Q}^{\mathbb{G}}$ est $(\varphi_t - r_t)$).

Application : Evaluation et couverture dans le marché avec défaut

La proposition ci-dessous est une reformulation, en terme de \mathbb{F} -marché, de résultats de Bielecki et al. [9] concernant l'évaluation et la couverture dans un marché avec défaut.

Proposition 2.4.2. — *On suppose que le \mathbb{F} -marché est complet. Alors n'importe quel contrat du \mathbb{G} -marché $\xi_T^G = \hat{\xi}_T \mathbf{1}_{T < \tau} + \xi_T^G \mathbf{1}_{T \geq \tau} \in \mathcal{G}_T$ peut être répliqué comme suit.*

La valeur de ξ_T^G sur l'événement $\{T \geq \tau\}$ détermine la quantité α_t (investie dans l'actif soumis au défaut) de la stratégie de couverture : $\alpha_t = -\frac{(\xi_t^G - \hat{X}_t^{\xi})}{S_{t-}^{CD}}$

où \hat{X}_t^ξ est la valeur en t du portefeuille (avec consommation) répliquant $\hat{\xi}_T$:

$$\text{pour } t < \tau, \hat{X}_t = \hat{X}_t^\xi = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^G} \left(\hat{\xi}_T e^{-\int_t^T (r_s + \varphi_s) ds} + \int_t^T e^{-\int_t^s (r_u + \varphi_u) du} \xi_s^G \varphi_s ds | \mathcal{F}_t \right).$$

La quantité π_t (investie dans les actifs risqués) est celle de la stratégie du \mathbb{F} -marché, avec taux de consommation $(\xi_t^G e^{-\Phi_{0,t}} \varphi_t)$, et répliquant le contrat $\hat{\xi}_T$.

Ainsi le prix $P_t(\xi_T^G)$ en t du contrat ξ_T^G est la valeur en t du portefeuille de couverture :

$$P_t(\xi_T^G) = \mathbf{1}_{t \geq \tau} \xi_\tau^G + \mathbf{1}_{t < \tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^G} \left(\xi_T e^{-\int_t^T (r_s + \varphi_s) ds} + \int_t^T e^{-\int_t^s (r_u + \varphi_u) du} \xi_s^G \varphi_s ds | \mathcal{F}_t \right).$$

2.4.4. Le problème d'optimisation dans le marché avec défaut. — Nous définissons maintenant un problème d'optimisation de la richesse terminale dans le \mathbb{G} -marché, et faisons la correspondance avec un problème d'optimisation de la richesse terminale et de la consommation dans le \mathbb{F} -marché.

Définition 2.4.3. — La structure de préférence d'un agent dans le \mathbb{G} -marché est caractérisée par l'utilité aléatoire $U^G(t, x)$ telle que $\forall x > 0$:

$$U^G(t, x) = \hat{u}(t, x) \mathbf{1}_{t < \tau} + \hat{v}(\tau, x) \mathbf{1}_{\tau \leq t} \text{ p.s.}$$

avec \hat{u} et \hat{v} fonctions d'utilité déterministes (concaves, croissantes, satisfaisant les conditions d'Inada).

Soit $\mathcal{A}^G(x)$ l'ensemble des stratégies admissibles du \mathbb{G} -marché, partant d'une richesse initiale x . Afin de souligner la correspondance entre \mathbb{F} et \mathbb{G} -marché, on paramétrise la quantité investie sur le CDS par C au lieu de α , on rappelle le lien entre les deux (cf. Proposition 2.4.1) :

$$\alpha_t = \frac{X_{t-}^G - G_t}{S_{t-}^{CD}} = \frac{X_{t-}^G - C_t \frac{e^{\Phi_{0,t}}}{\varphi_t}}{S_{t-}^{CD}}.$$

Le problème de maximisation de l'utilité dans le \mathbb{G} -marché est à horizon aléatoire :

Définition 2.4.4. — Dans le \mathbb{G} -marché, l'agent maximise l'utilité espérée de sa richesse terminale en $T \wedge \tau$

$$(2.43) \quad \sup_{(c, \kappa) \in \mathcal{A}^G(x)} \mathbb{E}[U^G(T \wedge \tau, X_{T \wedge \tau}^G)]$$

Ce problème de maximisation de l'utilité de la richesse terminale dans le \mathbb{G} -marché (2.43) est équivalent à un problème classique de maximisation de l'utilité de la richesse terminale et de la consommation dans le \mathbb{F} -marché. (u, v) étant donné, le critère à optimiser dans le \mathbb{F} -marché est

$$(2.44) \quad \mathbb{E} \left[\int_0^T v(t, C_t) dt + u(T, X_T^{\mathbb{F}, C}) \right], \text{ pour } (C, \kappa) \in \mathcal{A}(x)$$

où $\mathcal{A}(x)$ est l'ensemble des stratégies \mathbb{F} -auto-finançantes avec consommations (C, κ) . A (u, v) on associe les fonctions $\hat{u}(t, x)$ et $\hat{v}(t, x)$, pour tout $0 \leq t \leq T$

$$\hat{u}(t, x) = u(t, x e^{-\Phi_{0,t}}) e^{\Lambda_{0,t}}, \quad \hat{v}(t, x) = v(t, x e^{-\Phi_{0,t}} \varphi_t) e^{\Lambda_{0,t}} (\lambda_t)^{-1}.$$

Proposition 2.4.5. — Pour tout $(C, \kappa) \in \mathcal{A}^{\mathbb{G}}(x) = \mathcal{A}(x)$

$$\mathbb{E}[U^{\mathbb{G}}(T \wedge \tau, X_{T \wedge \tau}^{\mathbb{G}}) | \mathcal{G}_t] = e^{\Lambda_{0,t}} \mathbf{1}_{t < \tau} \mathbb{E}[u(T, X_T^{\mathbb{F}, c}) + \int_t^T v(s, C_s) ds | \mathcal{F}_t] + \mathbf{1}_{\tau \leq t} U^{\mathbb{G}}(\tau, X_{\tau}^{\mathbb{G}}).$$

Ainsi, considérer le problème d'optimisation dans le \mathbb{G} -marché permet de traiter simultanément la richesse terminale et la consommation. Même si la richesse $X^{\mathbb{G}}$ et l'utilité $U^{\mathbb{G}}$ ont des discontinuités en τ , les méthodes standard d'optimisation s'appliquent et permettent de résoudre le problème (2.43) en marché complet et incomplet (notons que l'incomplétude ne provient que de celle inhérente au \mathbb{F} -marché).

CHAPITRE 3

PARTENARIAT-PUBLIC-PRIVÉ ET EXTERNALISATION DE LA DETTE

Dans la formule classique de la maîtrise d'ouvrage public, la collectivité fait réaliser un équipement (hôpital, prison....) pour ses propres besoins et en assume le coût, pour partie, par autofinancement et pour partie par un emprunt auprès d'un établissement bancaire. Dans la formule "contrat de partenariat" (ou partenariat public-privé) la collectivité s'engage sur une période (de 15 à 25 ans) auprès de l'entreprise contractante, et se voit facturer un loyer : il s'agit d'un achat en "leasing", couvrant l'amortissement de l'équipement, le coût de la maintenance, les frais financiers. Avec Monique Pontier, nous avons comparé dans [48] les avantages et inconvénients des deux formules, d'un point de vue réduction des coûts. En particulier, dans le cas d'un consortium neutre au risque, une discussion des avantages de l'externalisation au regard des paramètres du modèle est menée, selon que l'on prend en compte ou non le risque de faillite du consortium. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [48] pour plus de détails. Puis dans [29] avec Gilles-Edouard Espinosa et Benjamin Jourdain, nous avons étudié le problème de l'externalisation mais d'un point de vue de la dette. Notre but est d'étudier la pertinence d'externaliser un gros investissement dans le but de réduire la dette d'une entreprise. Plus précisément, nous comparons deux situations. Dans la première, l'entreprise supporte la dette et l'investissement et externalise l'exploitation ; dans la deuxième, l'entreprise externalise à la fois l'investissement (et donc la dette) et l'exploitation. Nous étudions dans ces deux situations les équilibres de Nash et de Stackelberg, l'aversion au risque des deux entreprises étant modélisée par des fonctions d'utilité exponentielles dont les paramètres sont connus. Dans ce cas, à l'équilibre, la société auprès de laquelle on externalise l'investissement

est indifférente à accepter le contrat ou non. Nous comparons les deux situations en fonction de l'aversion de l'entreprise à contracter une dette. Enfin, nous généralisons ce problème au cas où l'entreprise possède une incertitude sur l'aversion au risque de la société à qui il externalise, dans ce cas il devient avantageux pour cette dernière de rentrer dans le contrat.

3.1. Formulation du problème

Dans la suite, on considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

3.1.1. Coûts et loyer. — On considère une firme I qui veut réduire sa dette et donc envisage d'externaliser un investissement auprès d'une autre firme J . Dans les deux cas (externalisation ou non), la firme J supporte le coût opérationnel du projet jusqu'à un horizon T . Soit (C_t^o) le coût opérationnel sur l'intervalle $[t, t + dt]$

$$(3.1) \quad C_t^o = \mu_t - \varphi(e_t) - \delta\psi(a),$$

avec

- μ_t le coût de base (prenant en compte le coût des matières premières, des employés, des infrastructures...). On suppose que μ_t est minorée par $k > 0$ (pour tout t , \mathbb{P} -p.s) et que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E} \int_0^T e^{\lambda \mu_s} ds < +\infty$.
- $e_t \geq 0$ représente l'effort pour réduire le coût opérationnel (amélioration logistique, recherche et développement),
- $\delta \in \mathbb{R}$ représente l'impact de la qualité de l'investissement sur la réduction des coûts opérationnels.
- $a = \frac{A}{T}$ où $A \geq 0$ est l'effort initial sur la qualité de l'investissement. Selon le signe de l'externalité δ , A influe positivement ou négativement sur le coût opérationnel.
- $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont des fonctions croissantes strictement concaves de classe C^1 satisfaisant les conditions d'Inada.

Les efforts (e_t) et a améliorent la valeur sociale du projet. L'effort (e_t) est un contrôle pour la firme J , alors que a est un contrôle pour la firme qui supporte l'investissement, I ou J en fonction de la situation.

L'investissement minimal initial requis pour le projet est $C_0 > 0$. L'investissement total initial $(D + a)T$ (avec $D = \frac{C_0}{T}$) est entièrement couvert par l'émission à l'instant 0 d'une dette à rembourser sur un horizon T . Le coût d'emprunt n'étant pas forcément le même pour les deux firmes, on les note

respectivement r_I et r_J : pour $t \in [0, T]$, l'emprunteur $K \in \{I, J\}$ doit rembourser $(1 + r_K)(D + a)dt$ entre t et $t + dt$.

En plus du coût opérationnel s'ajoutent les coûts de maintenance m_t et d'effort e_t . (m_t) , (e_t) , (μ_t) et (C_t^o) sont des processus \mathbb{F} -adaptés.

Soit R_t le loyer payé à la firme J par la firme I , en $[t, t + dt]$. Ce processus est calculé selon une règle simple décidée en $t = 0$ par la firme I . Puisque la firme I veut un projet de bonne qualité et une bonne maintenance, on suppose que R_t est positif et dépend de C_t^o et des coûts de maintenance :

$$(3.2) \quad R_t = \alpha + \beta C_t^o + \gamma g(m_t),$$

avec $\alpha \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \geq 0$, g fonction C^1 croissante strictement concave. De plus, on suppose que $m_0 := \inf\{m > 0 : g(m) > 0\} < +\infty$. Les constantes α , β et γ sont des contrôles de la firme I , fixés par contrat en $t = 0$.

3.1.2. Les problèmes d'optimisation. — L'aversion au risque des firmes I et J est modélisée par les fonctions d'utilités déterministes exponentielles $U(x) = -e^{-ux}$ pour I et $V(x) = -e^{-vx}$ pour J ($x \in \mathbb{R}$, $u, v > 0$).

On considère deux situations différentes : dans la situation 1, la firme J supporte la dette et s'occupe de l'exploitation ; ses contrôles sont donc a , e et m , alors que les contrôles de la firme I sont α , β et γ . Dans la situation 2, la firme J ne s'occupe que de l'exploitation, ses contrôles sont e et m , alors que les contrôles de la firme I sont a , α , β et γ . Ainsi les problèmes d'optimisation pour la firme J en situations 1 et 2 sont $v^1 = \sup_{(a,e,m)} J^1(a, e, m)$ et $v^2 = \sup_{(e,m)} J^2(e, m)$ respectivement, avec :

$$J^1(a, e, m) = \mathbb{E} \left(\int_0^T V(\alpha + (\beta - 1)(\mu_s - \varphi(e_s) - \delta\psi(a)) - e_s + \gamma g(m_s) - m_s - (1 + r_J)(D + a)) \eta(ds) \right)$$

$$J^2(e, m) = \mathbb{E} \left(\int_0^T V(\alpha + (\beta - 1)(\mu_s - \varphi(e_s) - \delta\psi(a)) - e_s + \gamma g(m_s) - m_s) \eta(ds) \right)$$

où $\eta(ds)$ est la mesure de probabilité prenant en compte ρ le taux de préférence pour le présent $\eta(ds) := e^{-\rho s} \frac{\rho}{1 - e^{-\rho T}} 1_{[0, T]}(s) ds$.

Pour la firme I , le projet a une valeur sociale initiale $b^a(a)$ et une bonne maintenance représente aussi un bénéfice social $b^m(m)$. Le bénéfice des efforts sur les coûts opérationnels est modélisé par la fonction b^e . On introduit une fonction de pénalisation f qui représente l'aversion de la firme I à émettre de la dette. Ces fonctions sont croissantes, concaves pour les b et convexe pour f .

Ainsi les problèmes d'optimisation pour la firme I en situations 1 et 2 sont $u^1 = \sup_{(\alpha, \beta, \gamma)} I^1(\alpha, \beta, \gamma)$ et $u^2 = \sup_{(a, \alpha, \beta, \gamma)} I^2(a, \alpha, \beta, \gamma)$ respectivement, avec :

$$\begin{aligned} I^1(\alpha, \beta, \gamma) &= \mathbb{E} \left(b^a(a) + \int_0^T e^{-\rho s} U(b^m(m_s) + b^e(e_s) - \alpha - \beta(\mu_s - \varphi(e_s) - \delta\psi(a)) - \gamma g(m_s)) ds \right) \\ I^2(a, \alpha, \beta, \gamma) &= \mathbb{E} \left(b^a(a) - f((1 + r_I)(D + a)T) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T e^{-\rho s} U(b^m(m_s) + b^e(e_s) - \alpha - \beta(\mu_s - \varphi(e_s) - \delta\psi(a)) - \gamma g(m_s)) ds \right). \end{aligned}$$

On suppose que $F(a) := b^a(a) - f((1 + r_I)(D + a)T)$ est strictement concave, et que $F'(\infty) = -\infty$, $F(\infty) = -\infty$ et $F'(0) > 0$. L'ensemble des contrôles admissibles pour la firme I est tel que la firme J accepte le contrat, i.e. en situation 1,

$$(3.3) \quad \mathbb{E} \left(\int_0^T V(\alpha + (\beta - 1)(\mu_s - \varphi(e_s) - \delta\psi(a)) - e_s + \gamma g(m_s) - m_s - (1 + r_J)(D + a)) \eta(ds) \right) \geq V(0);$$

et en situation 2,

$$(3.4) \quad \mathbb{E} \left(\int_0^T V(\alpha + (\beta - 1)(\mu_s - \varphi(e_s) - \delta\psi(a)) - e_s + \gamma g(m_s) - m_s) \eta(ds) \right) \geq V(0).$$

Selon le rapport de force entre les deux firmes, différentes notions d'équilibre peuvent faire sens : nous allons regarder l'existence d'un équilibre de Nash, et d'un équilibre de Stackelberg avec I leader. Dans équilibre de Nash, les deux firmes prennent leur décision en même temps et par définition, aucune ne réalise de gain en déviant de cette réalisation, sachant que l'autre n'a pas dévié elle-même de cette réalisation. Dans un équilibre de Stackelberg, les deux firmes prennent leur décision l'une après l'autre, celle la prenant en premier étant appelée leader (et l'autre satellite). La firme leader prend en compte le comportement de la firme satellite en intégrant la fonction de réaction de celle-ci à sa propre fonction de profit. Dans un équilibre de Stackelberg, les deux firmes maximisent leur profit, compte tenu de l'offre de leur concurrent. Nous pourrions aussi considérer un équilibre de Stackelberg avec J leader : dans ce cas, dans la situation $i \in \{1, 2\}$, quelque soit le choix de J , le contrôle optimal de I consiste à saturer la contrainte $J^i \geq V(0)$.

3.2. Réponse optimale de la firme J , situations 1 et 2

La réponse optimale de la firme J , étant donnés les contrôles de la firme I , se calcule facilement.

• Situation 1, on se donne (α, β, γ) dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Le problème d'optimisation pour la firme J s'écrit ω par ω et t par t

$$\sup_{e \geq 0} \{(1 - \beta)\varphi(e) - e\} + \sup_{m \geq 0} \{\gamma g(m) - m\} + \sup_{a \geq 0} \{\delta(1 - \beta)\psi(a) - (1 + r_J)a\}.$$

Ainsi

(3.5)

$$m^* = (g')^{-1}(1/\gamma) ; e^* = (\varphi')^{-1} \left(\frac{1}{(1 - \beta)^+} \right) ; a^* = (\psi')^{-1} \left(\frac{1 + r_J}{(\delta(1 - \beta))^+} \right).$$

• Situation 2, on se donne $(a, \alpha, \beta, \gamma)$ dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. De même

$$(3.6) \quad m^* = (g')^{-1}(1/\gamma), \quad e^* = (\varphi')^{-1} \left(\frac{1}{(1 - \beta)^+} \right).$$

Afin de décrire les équilibres de Nash et de Stackelberg, on introduit les applications $C_e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $B_e : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ (définies pour $e \in \mathbb{R}_+$)

$$(3.7) \quad C_e(\beta) := \frac{1}{v} \ln \mathbb{E} \int_0^T e^{v(1-\beta)(\mu_s - \varphi(e))} \eta(ds),$$

$$(3.8) \quad B_e(\beta, m) := e^{u(Id-b^m)(m)} e^{u(Id-b^e)(e)} e^{uC_e(\beta)} \mathbb{E} \int_0^T e^{-\rho s} e^{u\beta(\mu_s - \varphi(e))} ds.$$

Si e est prix comme l'effort optimal $e^*(\beta) = (\varphi')^{-1} \left(\frac{1}{(1-\beta)^+} \right)$, on note $C_{e^*(\beta)}$ et $B_{e^*(\beta)}$ respectivement par

(3.9)

$$C(\beta) := \frac{1}{v} \ln \mathbb{E} \int_0^T e^{v(1-\beta)(\mu_s - \varphi(e^*(\beta)))} \eta(ds),$$

(3.10)

$$B(\beta, m) := e^{u(Id-b^m)(m)} e^{u(Id-b^e) \circ e^*(\beta)} e^{uC(\beta)} \mathbb{E} \int_0^T e^{-\rho s} e^{u\beta(\mu_s - \varphi(e^*(\beta)))} ds.$$

3.3. Equilibre de Nash

Dans le cas d'un équilibre de Nash, le β optimal est $\frac{v}{u+v}$, et les applications B_e et B définies en (3.8) et (3.10) se simplifient (pour $\beta = \frac{v}{u+v}$) en :

$$(3.11) \quad B_e(\beta, m) = \frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho} e^{u(Id-b^m)(m)} e^{u(Id-b^e)(e)} e^{(u+v)C_e(\beta)}$$

$$(3.12) \quad B(\beta, m) = \frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho} e^{u(Id-b^m)(m)} e^{u(Id-b^e)(e^*(\beta))} e^{(u+v)C(\beta)}.$$

Soit la fonction $G : m \mapsto \frac{g(m)}{g'(m)} - m$

Proposition 3.3.1. — Dans la situation 1, il existe une infinité d'équilibres de Nash, qui consistent en $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{e}, \hat{m}, \hat{a})$ définis par

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{v}{u+v}, \quad \hat{e} = (\varphi')^{-1}\left(\frac{u+v}{u}\right), \quad \hat{a} = (\psi')^{-1}\left(\frac{(u+v)(1+r_J)}{\delta+u}\right), \quad \hat{\gamma} = \frac{1}{g'(\hat{m})}, \\ \hat{\alpha} &= C(\hat{\beta}) + (1+r_J)(D+\hat{a}) + \hat{e} - \frac{u}{u+v}\delta\psi(\hat{a}) - G(\hat{m}), \end{aligned}$$

pour \hat{m} dans $\hat{\mathcal{M}}_1(r_J) := [0, G^{-1}(C(\hat{\beta}) + (1+r_J)(D+\hat{a}) + \hat{e} - \frac{u}{u+v}\delta\psi(\hat{a}))]$. Les valeurs optimales correspondantes pour les firmes J et I sont respectivement $V(0)$ et

$$\hat{I}^1(\hat{m}) = b^a(\hat{a}) - e^{-u\delta\psi(\hat{a})}e^{u(1+r_J)(D+\hat{a})}B(\hat{\beta}, \hat{m})$$

avec $C(\hat{\beta})$ et $B(\hat{\beta}, \hat{m})$ définis en (3.9) et (3.12).

Quelques remarques sur ce résultat :

- Bien qu'il existe une infinité d'équilibres de Nash, les contrôles $\hat{\beta}$, \hat{e} et \hat{a} sont les mêmes dans tous ces équilibres.
- Puisque $\mu_s - \varphi(\hat{e}) - \delta\psi(\hat{a}) \geq 0$, $C(\hat{\beta}) - \frac{u}{u+v}\delta\psi(\hat{a}) \geq 0$ et $[0, G^{-1}((\varphi')^{-1}(\frac{u+v}{u}) + D)] \subset \bigcap_{r_J \geq 0} \hat{\mathcal{M}}_1(r_J)$.
- Parmi les équilibres de Nash de la proposition 3.3.1, il en existe un qui maximise \hat{I}^1 sur $\hat{\mathcal{M}}_1(r_J)$. En effet, \hat{I}^1 ne dépend de l'équilibre de Nash qu'à travers le terme $b^m(\hat{m}) - \hat{m}$, qu'il faut donc maximiser, or cette fonction $\hat{m} \mapsto b^m(\hat{m}) - \hat{m}$ est strictement concave donc il existe un unique maximum sur l'intervalle $\hat{\mathcal{M}}_1(r_J)$.

Proposition 3.3.2. — Dans la situation 2, il existe une infinité d'équilibres de Nash, qui consistent en $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{e}, \hat{m}, \hat{a})$ définis par

$$(3.13) \quad \hat{m} \geq 0, \quad \hat{\beta} = \frac{v}{u+v}, \quad \hat{e} = (\varphi')^{-1}\left(\frac{u+v}{u}\right), \quad \hat{\gamma} = \frac{1}{g'(\hat{m})},$$

$$(3.14) \quad \hat{a} \in \arg \max_{a \geq 0} \left[F(a) - e^{-u\delta\psi(a)}B(\hat{\beta}, \hat{m}) \right],$$

$$(3.15) \quad \hat{\alpha} = C(\hat{\beta}) + \hat{e} - \frac{u}{u+v}\delta\psi(\hat{a}) - G(\hat{m}),$$

et tels que $C(\hat{\beta}) + \hat{e} - \frac{u}{u+v}\delta\psi(\hat{a}) - G(\hat{m}) \geq 0$, condition satisfaite quand $\hat{m} \leq G^{-1}((\varphi')^{-1}(\frac{u+v}{u}))$. De plus, $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} > 0$ et si l'externalité $\delta \geq 0$, $\hat{a} > 0$ et est unique pour chaque \hat{m} . Les valeurs optimales correspondantes pour les firmes J et I sont respectivement $V(0)$ et

$$\hat{I}^2(\hat{m}) = b^a(\hat{a}) - f[(1+r_I)(D+\hat{a})T] - e^{-u\delta\psi(\hat{a})}B(\hat{\beta}, \hat{m}).$$

L'ordre dans lequel les différents contrôles sont déterminés est important, puisque certains d'entre eux dépendent des autres. En effet $\hat{\beta}$ est déterminé en premier car il ne dépend d'aucun autre, d'où on déduit la valeur de \hat{e} . Ensuite on fixe \hat{m} , de sorte à déterminer $\hat{\gamma}$, ensuite \hat{a} , et enfin $\hat{\alpha}$.

La preuve de l'existence d'un équilibre de Nash est similaire dans les deux situations. Pour fixer les notations, on donne les idées de la preuve dans la situation 1. Les contrôles a , e et m étant fixés, on optimise d'abord la fonctionnelle concave $I^1(\alpha, \beta, \gamma)$ sur l'ensemble fermé convexe

$E := \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3; \mathbb{E} \int_0^T e^{-v(\alpha + (\beta-1)(\mu_s - \varphi(e)) - \delta\psi(a)) - e + \gamma g(m) - m - (1+r_J)(D+a)} \eta(ds) \leq 1 \right\}$ en oubliant les contraintes de positivités de α et γ . Dans ce cas les conditions du premier ordre pour le Lagrangien sont suffisantes, et on montre qu'aucun point intérieur de E ne peut être optimum (ie à l'optimum, la contrainte est saturée), ce qui conduit à la caractérisation des contrôles optimaux pour la firme I

$$\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; \beta = \frac{v}{u+v}, \alpha + \gamma g(m) = C_e(\beta) - \frac{u}{u+v} \delta\psi(a) + e + m + (1+r_J)(D+a)\}.$$

Soit $\hat{\mathcal{M}}_2(r_I)$ l'ensemble des $\hat{m} \geq 0$ pour lesquels il existe $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{e}, \hat{a})$ tels que $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{e}, \hat{m}, \hat{a})$ est un équilibre de Nash dans la situation 2. On vérifie que $[0, G^{-1}((\varphi')^{-1}(\frac{u+v}{u}))] \subset \hat{\mathcal{M}}_1(r_J) \cap \left\{ \bigcap_{r_I \geq 0} \hat{\mathcal{M}}_2(r_I) \right\}$ et il est donc pertinent de comparer sur cet intervalle les valeurs optimales $\hat{I}^1(\hat{m})$ et $\hat{I}^2(\hat{m})$ de la firme I correspondants aux deux situations, pour un même effort de maintenance \hat{m} .

Proposition 3.3.3. — On fixe $r_J \geq 0$ et $\hat{m} \in \hat{\mathcal{M}}_1(r_J) \cap \left\{ \bigcap_{r_I \geq 0} \hat{\mathcal{M}}_2(r_I) \right\}$. Si le taux r_I satisfait

$$(3.16) \quad r_I \leq \frac{f^{-1} \left[B(\hat{\beta}, \hat{m}) e^{u\delta\psi(\hat{a}_1(r_J))} (e^{u(1+r_J)(D+\hat{a}_1(r_J))} - 1) \right]}{(D + \hat{a}_1(r_J))T} - 1,$$

alors $\hat{I}^2(\hat{m}) \geq \hat{I}^1(\hat{m})$ et le meilleur contrat pour la firme I est la situation 2, c'est-à-dire ne pas externaliser.

Ainsi émettre de la dette est le meilleur choix pour la firme J dès que son taux d'intérêt est suffisamment bas (le niveau au dessous duquel c'est le cas dépend du taux r_J de la firme I ainsi que de la fonction f de l'aversion à la dette).

Proposition 3.3.4. — On suppose $\delta > 0$. On fixe $r_J \geq 0$ et $\hat{m} \in \hat{\mathcal{M}}_1(r_J) \cap \left\{ \bigcap_{r_I \geq 0} \hat{\mathcal{M}}_2(r_I) \right\}$. Si le taux r_I satisfait

$$(1 + r_I)f'[(1 + r_I)(D + \hat{a}_1(r_J))T] > (b^a)'(\hat{a}_1(r_J)) + u\delta\psi'(\hat{a}_1(r_J))B(\hat{\beta}, \hat{m})e^{-u\delta\psi(\hat{a}_1(r_J))},$$

(3.17) ou

$$\psi'(\hat{a}_2(r_I)) > \frac{(u + v)(1 + r_J)}{u\delta}$$

et

(3.18)

$$(1 + r_I)(D + \hat{a}_2(r_I))T \geq f^{-1} \left[B(\hat{\beta}, \hat{m})e^{u\delta\psi(\hat{a}_2(r_I))} \left(e^{u(1+r_J)(D+\hat{a}_2(r_I))} - 1 \right) \right]$$

alors $\hat{I}^1(\hat{m}) \geq \hat{I}^2(\hat{m})$ et le meilleur contrat pour la firme I est la situation 1, i.e. externaliser.

L'interprétation économique de la condition (3.17) est aussi naturelle. En effet, les membres de droite de cette inégalité ne dépendent pas de r_I alors que les membres de gauche sont des fonctions croissantes de r_I . Ainsi (3.17) est satisfaite dès que le taux r_I est suffisamment grand.

3.4. Equilibre de Stackelberg, firme I leader

Pour un équilibre de Stackelberg, selon la situation 1 ou 2 et le signe de δ , le β optimal est caractérisé en tant que solution d'équations différentes. Afin de spécifier ces équations, nous introduisons les fonctions

$$(3.19) \quad h(\lambda) = \frac{\mathbb{E} \int_0^T e^{-\rho s} \mu_s e^{\lambda \mu_s} ds}{\mathbb{E} \int_0^T e^{-\rho s} e^{\lambda \mu_s} ds},$$

$$(3.20) \quad S(\beta) := \frac{\frac{\beta}{1-\beta} + (b^e)' \circ (\varphi')^{-1} \left(\frac{1}{(1-\beta)^+} \right)}{(1-\beta)^2 \varphi'' \circ (\varphi')^{-1} \left(\frac{1}{(1-\beta)^+} \right)},$$

(3.21)

$$\tilde{S}(\beta) := \frac{1 + r_J}{\delta(1-\beta)^2(\psi'')((\psi')^{-1} \left(\frac{1+r_J}{(\delta(1-\beta))^+} \right))} \left((1 + r_J) \frac{\beta}{1-\beta} + \frac{(b^a)'((\psi')^{-1} \left(\frac{1+r_J}{(\delta(1-\beta))^+} \right))}{ue^{(Id-b^m)((b^m)')^{-1}(1)}k(\beta)} \right),$$

avec $k(\beta)$ fonction (positive) de β définie par

(3.22)

$$k(\beta) := e^{u(Id-b^e) \circ e^*(\beta)} e^{-u\delta\phi \circ a^*(\beta)} e^{u(1+r_J)(D+a^*(\beta))} e^{uC(\beta)} \mathbb{E} \int_0^T e^{-\rho s} e^{u\beta(\mu_s - \varphi \circ e^*(\beta))} ds$$

où $e^*(\beta)$ et $a^*(\beta)$ sont définis en (3.5) et $C(\beta)$ en (3.9).
Soient les équations suivantes

$$(3.23) \quad h(u\beta) - h(v(1 - \beta)) = S(\beta),$$

$$(3.24) \quad h(u\beta) - h(v(1 - \beta)) = S(\beta) + \tilde{S}(\beta),$$

$$(3.25) \quad h(u\beta) - h(v(1 - \beta)) = \tilde{S}(\beta).$$

Proposition 3.4.1. — Dans la situation 1, il existe au moins un équilibre de Stackelberg avec la firme I leader. De plus, si $(\hat{e}, \hat{m}, \hat{a}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ est un équilibre de Stackelberg avec $\hat{\alpha} > 0$, alors il se caractérise par :

$$\hat{e} = (\varphi')^{-1}\left(\frac{1}{(1 - \hat{\beta})_+}\right), \hat{a} = (\psi')^{-1}\left(\frac{1 + r_J}{(\delta(1 - \hat{\beta}))_+}\right), \hat{m} = [(b^m)']^{-1}(1), \hat{\gamma} = 1/g'(\hat{m}),$$

$$\hat{\alpha} = C(\hat{\beta}) + (1 + r_J)(D + \hat{a}) + \hat{e} - (1 - \hat{\beta})\delta\psi(\hat{a}) - G(\hat{m}).$$

Si $\delta > 0$, alors $\hat{\beta}$ est solution de (3.24) et est plus petit que $\frac{v}{u+v}$.

Si $\delta < 0$, alors $\hat{\beta}$ est solution soit de (3.23) (plus petit que $\frac{v}{u+v}$) ou de (3.25) (plus grand que 1).

Proposition 3.4.2. — Dans la situation 2, il existe au moins un équilibre de Stackelberg avec la firme I leader. De plus, si $(\hat{e}, \hat{m}, \hat{a}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ est un équilibre de Stackelberg avec $\hat{\alpha} > 0$, alors il se caractérise par :

$$\hat{\beta} \text{ est solution de (3.23), } \hat{e} = (\varphi')^{-1}\left(\frac{1}{(1 - \hat{\beta})_+}\right), \hat{m} = [(b^m)']^{-1}(1), \hat{\gamma} = 1/g'(\hat{m}),$$

$\hat{a} \in \arg \max_{a \geq 0} (F(a) - e^{-u\delta\psi(a)} B(\hat{\beta}, \hat{m}))$ et $\hat{\alpha} = C(\hat{\beta}) + \hat{e} - (1 - \hat{\beta})\delta\psi(\hat{a}) - G(\hat{m})$, avec C et B définis en (3.9)-(3.10).

En particulier, $\hat{\beta} < \frac{v}{u+v}$. De plus, si $\delta \geq 0$, alors $\arg \max_{a \geq 0} (F(a) - e^{-u\delta\psi(a)} B(\hat{\beta}, \hat{m}))$ est un singleton et $\hat{a} > 0$.

Nous donnons à nouveau l'idée de la preuve pour la situation 1 (démarche similaire pour la situation 2). Cette fois a , e et m sont les réponses optimales de J donnés par (3.5). Remplaçant ces valeurs dans les fonctionnelles I^1 et J^1 , on doit donc optimiser $I^1(\alpha, \beta, m)$ sur l'ensemble $\{(\alpha, \beta, m) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+; J^1(\alpha, \beta, m) \leq 1\}$. On montre que l'on peut se restreindre à optimiser I^1 sur un sous-ensemble compact (notamment avec β plus petit qu'un certain $\bar{\beta}$

car $\sup_{(\alpha, m) \in \mathbb{R}_+^2} I^1(\alpha, \beta, m) \rightarrow -\infty$ pour $\beta \rightarrow \infty$) et on sépare l'étude selon que α est strictement positif ou nul en considérant les deux sous-ensembles

$$\begin{aligned} & \left\{ (\alpha, \beta, m) \in \mathbb{R}_+ \times (-\infty, \bar{\beta}] \times \mathbb{R}_+; J^1(\alpha, \beta, m) = 1 \right\}, \\ & \left\{ (0, \beta, m); \beta \in (-\infty, \bar{\beta}], m \geq 0, J^1(0, \beta, m) \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

3.5. Information incomplète

On considère les problèmes d'équilibres précédents dans la situation où les firmes ne connaissent pas parfaitement l'aversion au risque de la firme contrepartie : les fonctions d'utilité pour I et J sont toujours $U(x) = -e^{-ux}$ et $V(x) = -e^{-vx}$ respectivement, mais la firme I perçoit v comme une variable aléatoire indépendante que l'on note V (dont I connaît la loi), de même la firme J perçoit u comme une variable aléatoire indépendante que l'on note U (dont J connaît la loi). D'après la section 3.2, les contrôles optimaux de la firme J sont des fonctions de (β, γ) fixés par la firme I qui ne dépendent pas du paramètre d'aversion au risque u . Ainsi les équations (3.5) et (3.6) sont encore vérifiées en information incomplète et le paramètre u n'a pas d'impact sur l'équilibre. Par contre, l'incertitude sur le paramètre v a un impact car l'acceptation du contrat par la firme J en dépend. Afin de modéliser le besoin social de l'investissement, on introduit une pénalité $p \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ que doit payer la firme I dans le cas où la firme J n'accepte pas le contrat. $p = +\infty$ correspond au cas où la firme I veut absolument que la firme J accepte le contrat.

3.5.1. Equilibre de Stackelberg, firme I leader. — Soient \mathcal{A}^i , ($i = 1, 2$) les événements “la firme J accepte le contrat” dans la situation i .

Le problème d'optimisation pour la firme I , dans la situation 1 et 2 respectivement, devient en information incomplète

$$(3.26) \quad u_I^1 := -p \vee \sup_{(\alpha, \beta, \gamma)} \{I^1(\alpha, \beta, \gamma) \mathbb{P}(\mathcal{A}^1(\alpha, \beta, \gamma)) - p(1 - \mathbb{P}(\mathcal{A}^1(\alpha, \beta, \gamma)))\},$$

$$(3.27) \quad u_I^2 := -p \vee \sup_{(a, \alpha, \beta, \gamma)} \{I^2(a, \alpha, \beta, \gamma) \mathbb{P}(\mathcal{A}^2(a, \alpha, \beta, \gamma)) - p(1 - \mathbb{P}(\mathcal{A}^2(a, \alpha, \beta, \gamma)))\}.$$

Les fonctions

$$I^1(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbb{E} \left[b^a(a^*(\beta)) - \int_0^T e^{-\rho s} e^{-u([b^m - \gamma g](m^*(\gamma)) + [b^e + \beta \varphi](e^*(\beta)) - \alpha - \beta(\mu_s - \delta \psi(a^*(\beta))))} ds \right]$$

$$I^2(a, \alpha, \beta, \gamma) = F(a) - \mathbb{E} \int_0^T e^{-\rho s} e^{-u([b^m - \gamma g](m^*(\gamma)) + [b^e + \beta \varphi](e^*(\beta)) - \alpha - \beta(\mu_s - \delta \psi(a)))} ds$$

(avec e^* , m^* et a^* définis en (3.5)) représentent le gain social que reçoit la firme I dans les situations 1 et 2, si la firme J accepte le contrat. Les ensembles \mathcal{A}^i d'acceptation du contrat se caractérise par $\mathcal{A}^i = \{\omega; \tilde{J}^i(V(\omega), \cdot) \leq 1\}$, où \tilde{J}^i sont les fonctions suivantes (strictement convexes et continues en la variable v)

$$\tilde{J}^1(v, \alpha, \beta, \gamma) := \mathbb{E} \int_0^T e^{-v(\alpha + [(1-\beta)\varphi - Id]e^*(\beta) + (\beta-1)(\mu_s - \delta \psi(a^*(\beta))) + [\gamma g - Id](m^*(\gamma)))} e^{v(1+r_J)(D+a^*(\beta))} \eta(ds)$$

$$\tilde{J}^2(v, a, \alpha, \beta, \gamma) := \mathbb{E} \int_0^T e^{-v(\alpha + [(1-\beta)\varphi - Id]e^*(\beta) + (\beta-1)(\mu_s - \delta \psi(a)) + [\gamma g - Id](m^*(\gamma)))} \eta(ds).$$

On définit les fonctions valeur (situations 1 et 2) du problème avec information complète que l'aversion au risque de la firme J est v

$$u^1(v) := \sup_{\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : \tilde{J}^1(v, \alpha, \beta, \gamma) \leq 1\}} I^1(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$u^2(v) := \sup_{\{(a, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : \tilde{J}^2(v, a, \alpha, \beta, \gamma) \leq 1\}} I^2(a, \alpha, \beta, \gamma)$$

Soit

$$(3.28) \quad w_I^i := -p \vee \sup_{v > 0} \{u^i(v) \mathbb{P}(V \leq v) - p(1 - \mathbb{P}(V \leq v))\}.$$

On montre que $w_I^i \leq u_I^i$, et que si $p < +\infty$ ou bien s'il existe $v \in (0, +\infty)$ tel que $\mathbb{P}(V > v) = 0$ alors on a l'égalité $w_I^i = u_I^i$. Cela signifie que pour résoudre son problème d'optimisation en information incomplète (3.26) ou (3.27), la firme I résout d'abord le problème pour chaque v comme en information complète et "choisit" alors le niveau v qui atteint le plus grand gain social espéré dans (3.28).

Théorème 3.5.1. — Soit $v_0 := \inf\{v > 0 : \mathbb{P}(V \leq v) > 0\}$. Si $\lim_{v \rightarrow v_0^+} u^i(v) \leq -p$ alors ne pas conclure de contrat entre les deux firmes est un équilibre de Stackelberg dans la situation i en information incomplète.

Sinon, si $v_1 := \sup\{v > 0 : \mathbb{P}(V > v) > 0\} < +\infty$ alors le problème d'optimisation (3.28) admet une solution $v^* \in (0, v_1] \cap [v_0, v_1]$ (égale à v_1 si $p = +\infty$) et tout équilibre de Stackelberg pour le problème en information complète et

aversion au risque v^* pour la firme J est un équilibre de Stackelberg pour le problème en information incomplète.

3.5.2. Equilibre de Nash. — Pour un équilibre de Nash en information incomplète, nous n'avons pas de condition suffisante d'existence mais les conditions nécessaires suivantes, qui sont identiques dans les deux situations.

Proposition 3.5.2. — *On suppose l'existence d'un équilibre de Nash en information incomplète $\hat{c} = (\hat{a}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{e}, \hat{m})$ tel que la fonction valeur de la firme I est plus grande que $-p$ (ie tel que la firme J accepte le contrat) et soit $\hat{v} := \sup\{v > 0 : J(v, \hat{c}) \leq 1\}$ avec $J(v, \hat{c})$ défini en situations 1 et 2 respectivement par*

$$J(v, a, \alpha, \beta, \gamma, e, m) := \mathbb{E} \int_0^T e^{-v(\alpha + (\beta-1)(\mu_s - \varphi(e) - \delta\psi(a)) - e + \gamma g(m) - m - (1+r_J)(D+a))} \eta(ds),$$

$$J(v, a, \alpha, \beta, \gamma, e, m) := \mathbb{E} \int_0^T e^{-v(\alpha + (\beta-1)(\mu_s - \varphi(e) - \delta\psi(a)) - e + \gamma g(m) - m)} \eta(ds).$$

Alors $\hat{v} > 0$, $\hat{e} = (\varphi')^{-1}\left(\frac{1}{(1-\hat{\beta})^+}\right)$, $\hat{\gamma} = \frac{1}{g'(\hat{m})}$ et en situation 1, $\hat{a} = (\psi')^{-1}\left(\frac{1+r_J}{(\delta(1-\hat{\beta}))^+}\right)$.

si $\hat{v} < +\infty$, \hat{c} un équilibre de Nash pour le problème en information complète et aversion au risque \hat{v} pour la firm J , et quelque soit $v < \hat{v}$, $\mathbb{P}(V \leq v) < \mathbb{P}(V \leq \hat{v})$.

Si $\hat{v} = +\infty$, alors quelque soit $v \in (0, +\infty)$, $\mathbb{P}(V \leq v) < 1$.

Si la distribution de V est à support discret (ie il existe (v_1, \dots, v_n) tel que $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(V = v_k) = 1$), et si il existe un équilibre de Nash en information incomplète, alors nécessairement $\exists i$ tel que $\hat{v} = v_i$.

3.6. Perspectives

Avec Guillaume Carlier et Monique Pontier, nous nous intéressons aux contrats de Partenariat Public Privé d'un point de vue aléa moral, en nous inspirant de l'article fondateur de Sannikov [77] pour traiter le problème de manière dynamique. Notre but est trouver le contrat optimal que doit établir la collectivité publique, et de le comparer au modèle de contrat usuellement considéré dans la littérature économique sur le sujet. La formalisation de cette question conduit à un problème de contrôle stochastique.

Le coût opérationnel $(C_s^0)_{s \geq 0}$ du service de maintenance de l'infrastructure est un processus \mathbb{F} -adapté par exemple de la forme $C_t^0 = C_0^0 + \int_0^t k ds +$

$\int_0^t \sigma dW_s, \sigma > 0$ (avec W un \mathbb{F} -mouvement brownien). Le privé fait des efforts A pour améliorer sa prestation, et le public verse une rente R au privé. La “valeur sociale” instantanée du projet est une fonction des efforts et du coût donnée par

$$(3.29) \quad dX_t := (A_t + \varphi(A_t))dt - dC_t^0 = (A_t + \varphi(A_t))dt - kdt - \sigma dW_t$$

Les contrôles sont donc les processus (R_t) (rente versée par le public au privé) et (A_t) (effort du privé pour améliorer sa prestation), processus \mathbb{F} adaptés et positifs. On note U l'utilité de l'opérateur privé, h le coût de l'effort pour le privé et φ l'utilité pour le public.

• Fonction objectif du privé :

Si le contrat est perpétuel l'opérateur privé souhaite maximiser son utilité totale nette de ses coûts, i.e. la rente R étant fixée par l'agent public :

$$(3.30) \quad \max_A \left(\mathbb{E} \left(\int_0^\infty e^{-\delta s} (U(R_s) - h(A_s)) ds \right) \right)$$

sur l'espace des contrôles admissibles :

$$E^* := \{(R_s, A_s)_{s \in [0, T]} \mid \mathbb{F} - \text{adaptés positifs tels que } U(R_s) - h(A_s) \geq 0 \text{ p.s.}\}.$$

• Fonction objectif du public :

La collectivité publique souhaite maximiser le bien être social défini comme la différence entre la valeur sociale du projet net de ses coûts et des paiements faits à l'opérateur :

$$(3.31) \quad \max_{(R, A) \in E^*} E \left[\int_0^\infty e^{-\delta s} (dX_s - R_s ds) \right]$$

Soit :

$$\max_{(R, A) \in E^*} E \left[\int_0^\infty e^{-\delta s} [A_s ds - (dC_s^0 - \varphi(A_s) ds) - R_s ds] \right].$$

sous la contrainte que le contrat soit assez avantageux pour que le privé l'accepte.

L'idée de Sannikov est de reparamétriser le problème par le processus \mathcal{W}_t qui correspond à la valeur future espérée par le privé :

$$e^{-\delta t} \mathcal{W}_t := E \left[\int_t^\infty e^{-\delta s} (U(R_s) - h(A_s)) ds / \mathcal{F}_t \right]$$

$$d\mathcal{W}_t = \delta \mathcal{W}_t dt - (U(R_t) - h(A_t)) dt + Y_t dW_t.$$

Pour que le contrat soit incitatif pour le privé on peut montrer que $Y_t = -\sigma \frac{h'(A_t)}{1+\varphi'(A_t)}$ et dans ce cas $A_t^* = G^{-1}(-Y_t \sigma^{-1})$ (o $G = \frac{h'}{1+\varphi'}$) réalise le maximum de l'utilité espérée du privé (3.30).

On cherche la valeur future espérée pour le public (i.e. la valeur de continuation) comme une fonction F de \mathcal{W}_t , ainsi

$$e^{-\delta t}F(\mathcal{W}_t) = E[\int_t^\infty e^{-\delta s}(A_s + \varphi(A_s) - R_s - k)ds/\mathcal{F}_t].$$

On montre que sous des hypothèses de convexité, la fonction valeur du public

$$F : x \mapsto \max_{(R,A) \in E^*} E_x \left[\int_0^\infty e^{-\delta s}(dX_s - R_s ds) \right]$$

est l'unique solution de l'équation HJB

$$\max_{e,r,h(e) \leq U(r)} \left[-\delta F(x) + F'(x)(\delta x - U(r) + h(e)) + \frac{1}{2}F''(x)\left(\sigma \frac{h'(e)}{1 + \varphi'(e)}\right)^2 + e - r + \varphi(e) - k \right] = 0.$$

En particulier la rente optimale est donnée par $r^*(x) = (U')^{-1}(-\frac{1}{F'(x)})\mathbf{1}_{F'(x) < 0}$. Des tests numériques sont en cours pour voir si la forme de la rente correspond à l'expression donné à priori dans les travaux précédents (cf. (3.2), inspirés des travaux économiques).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. AMENDINGER – « Martingale representation theorems for initially enlarged filtrations », *Stochastic Processes and their Applications* **89** (2000), no. 1, p. 101–116.
- [2] J. AMENDINGER, D. BECHERER & M. SCHWEIZER – « A monetary value for initial information in portfolio optimization », *Finance and Stochastics* **7** (2003), no. 1, p. 29–46.
- [3] E. AURIOL & P.M. PICARD – « Government outsourcing : Public contracting with private monopoly », *The Economic Journal*, 119 (October 2011), pp 1464-1493.
- [4] E. AURIOL & P.M. PICARD – « A theory of BOT concession contracts », *Journal of Economic Behaviour and Organization*, 2834, (2011).
- [5] P. BARRIEU, C. HILLAIRET, H. BENSUSAN, N. EL KAROUI, S. LOISEL, C. RAVANELLI & Y. SALHI – « Understanding, modeling and managing longevity risk : key issues and main challenges », *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol. 2012, No 3, 203-231, (2012).
- [6] V. E. BENEŠ – « Existence of optimal strategies based on specified information, for a class of stochastic decision problems », *SIAM Journal on Control and Optimization* **8** (1970), p. 179–188.
- [7] F.P. BERRIER & M.R. TEHRANCHI – « Forward utility of investment and consumption ». Preprint, (2011).

- [8] K. BACK– « Continuous trading with asymmetric information and imperfect competition », *IMA, Mathematical Finance*, M.H.A. Davis and D. Duffie and W.H. Fleming and S.E. Shreve, (1994).
- [9] T. R. BIELECKI, M. JEANBLANC & M. RUTKOWSKI , « Pricing and trading credit default swaps in a hazard process model », *The Annals of Applied Probability* **18** (2008), no. 6, p. 2495–2529.
- [10] T. R. BIELECKI & M. RUTKOWSKI – *Credit risk : modelling, valuation and hedging*, Springer Finance, Springer-Verlag, Berlin, (2002).
- [11] T. BJORK– « Equilibrium theory in continuous time ». 2012
- [12] JOHN C. COX, JONATHAN C. INGERSOLL & STEVEN A. ROSS– « A theory of the term structure of interest rates », *Econometrica*, 53(2) :385403, (March 1985)
- [13] L. CAMPI & U. ÇETIN – « Insider trading in an equilibrium model with default : a passage from reduced-form to structural modelling », *Finance and Stochastics* **11** (2007), no. 4, p. 591–602.
- [14] U. ÇETIN, R. JARROW, P. PROTTER & Y. YILDIRIM – « Modeling credit risk with partial information », *The Annals of Applied Probability* **14** (2004), no. 3, p. 1167–1178.
- [15] K-H. CHO & N. EL KAROUI – « Insider trading and nonlinear equilibria : Single auction case », *Annales d'économie et de Statistique*, 60, (2000).
- [16] D. COCULESCU, H. GEMAN & M. JEANBLANC – « Valuation of default-sensitive claims under imperfect information », *Finance and Stochastics* **12** (2008), no. 2, p. 195–218.
- [17] J. M. CORCUERA, P. IMKELLER, A. KOHATSU-HIGA & D. NUALART – « Additional utility of insiders with imperfect dynamical information », *Finance and Stochastics* **8** (2004), no. 3, p. 437–450.
- [18] M.H.A. DAVIS– « Option pricing in incomplete markets », *S.R. Pliska, editor, Mathematics of Derivative Securities*, pages 216226. M.A.H. Dempster and S.R. Pliska, cambridge university press edition, (1998).

- [19] D. DUFFIE & D. LANDO – « Term structures of credit spreads with incomplete accounting information », *Econometrica* **69** (2001), no. 3, p. 633–664.
- [20] P.H. DYBVIG, J.E. INGERSOL & S.A. ROSS – « Longforward and zero-coupon rates can never fall », *Journal of Business*, 69 :125, (1996).
- [21] N.EL KAROUI – « Les aspects probabilistes du contrle stochastique », *In Ninth Saint Flour Probability Summer School1979*(Saint Flour, 1979), volume 876 of Lecture Notes in Math., pages 73238. Springer, Berlin, (1981).
- [22] N.EL KAROUI & M. MRAD – « An exact connection between two solvable sdes and a non linear utility stochastic pdes », *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 4(1) :697 736, (2013).
- [23] N. EL KAROUI, C. HILLAIRET & M. MRAD – « Affine long term yield curves : an application of the Ramsey rule with progressive utility », *Journal of Financial Engineering, Vol.1, No.1*, (2014).
- [24] N. EL KAROUI, C. HILLAIRET & M. MRAD – « Ramsey Rule with Progressive Utility : a theoretical framework for Long Term Yield Curves Modeling », *Soumis*, (2014).
- [25] N. EL KAROUI, M. JEANBLANC, Y. JIAO & B. ZARGARI – « Conditional default probability and density », à paraître dans *Inspired by Finance : the Musiela Festschrift*, 201-219, Springer, (2014).
- [26] N. EL KAROUI, A. FRACHOT & H. GEMAN – « On the behavior of long zero coupon rates in a no arbitrage framework », *Review of derivatives research*, 1 :351369, (1997).
- [27] R.J. ELLIOTT & M. JEANBLANC – « Incomplete markets and informed agents », *Mathematical Method of Operations Research*, 50 :475-492, (1998).
- [28] E. ENGEL, R. FISCHER & A. GALETOVIC – « Public-Private Partnerships to Revamp U.S. Infrastructure », Discussion Paper (2011).
- [29] G.E. ESPINOSA, C. HILLAIRET, B. JOURDAIN& M. PONTIER – « Reducing the debt : is it optimal to outsource an investment ? » (2013), Soumis .

- [30] D. FILIPOVIC & E. PLATEN – « Consistent market extensions under the benchmark approach », *Mathematical Finance*, 19(1) :4152, (2009).
- [31] K. GIESECKE – « Default and information », *Journal of Economic Dynamics & Control* **30** (2006), no. 11, p. 2281–2303.
- [32] K. GIESECKE & L.R. GOLDBERG – « The market price of credit risk : the impact of asymmetric information », (2008)
- [33] C. GOLLIER – « An evaluation of stens report on the economics of climate change », *Technical Report 464*, IDEI Working Paper, (2006)
- [34] C. GOLLIER – « Comment intégrer le risque dans le calcul économique ? », *Revue d'économie politique*, 117(2) :209223, (2007).
- [35] C. GOLLIER – « The consumption-based determinants of the term structure of discount rates », *Mathematics and Financial Economics*, 1(2) :81101, (July 2007).
- [36] C. GOLLIER – « Ecological discounting », *IDEI Working Papers 524*, Institut d'économie Industrielle (IDEI), Toulouse, (July 2009).
- [37] C. GOLLIER – « Expected net present value, expected net future value and the ramsey rule », *Technical Report 557*, IDEI Working Paper, (June 2009).
- [38] C. GOLLIER – « Managing long-term risks » (2009).
- [39] C. GOLLIER – « Should we discount the far-distant future at its lowest possible rate ? », *Economics : the Open Access, Open-Assessment E-Journal*, 3, (2009).
- [40] A. GRORUD & M. PONTIER – « Insider trading in a continuous time market model », *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **1** (1998), no. 3, p. 331–347.
- [41] D. HEATH, R. JARROW & A. MORTON – « Bond pricing and the term structure of interest rates : A new methodology for contingent claims valuation », *Econometrica*, 60(1) :77105, (January 1998).

- [42] A.S. KYLE – « Continuous auctions and insider trading », *Econometrica*, 53, (1985).
- [43] D.HEATH & E.PLATEN – « A benchmark approach to quantitative finance », *Springer Finance*. Springer-Verlag, Berlin, (2006).
- [44] C. HILLAIRET – « Comparison of insiders' optimal strategies depending on the type of side-information », *Stochastic Processes and their Applications* **115** (2005), no. 10, p. 1603–1627.
- [45] C. HILLAIRET & Y. JIAO – « Information asymmetry in pricing of credit derivatives », *International Journal of Theoretical and Applied Finance* **14** (2011), no. 5, p. 611–633.
- [46] ———, « Credit risk with asymmetric information on the default threshold », *Stochastics : An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, Vol. 84, Nos. 2-3, 183-198, (2012).
- [47] ———, « Portfolio optimization with insider's initial information and counterparty risk », *Finance and Stochastics*, to appear (2014).
- [48] C. HILLAIRET & M. PONTIER – « A Modelisation of Public Private Partnerships with failure time », *Laurent Decreusefond and Jamal Najim ed. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, Vol 22, (2012), pp 91-117.
- [49] J.C. HOURCADE & F. LECOCQ – « Le taux d'actualisation contre le principe de précaution? Leons partir du cas des politiques climatiques » (2004).
- [50] E. IOSSA, D. MARTIMORT & J. POUYET – « Partenariats Public-Privé, quelques réflexions », *Revue économique*, 59 (3), (2008).
- [51] E. IOSSA & P.E. REY – « Building reputation for contract renewal : Implications for performance dynamics and contract duration », preprint (2011).
- [52] J. JACOD – « Grossissement initial, hypothèse (H') et théorème de girsanov », in *Grossissements de filtrations : exemples et applications*, Lecture Notes in Math., vol. 1118, Springer, Berlin, (1985), p. 15–35.

- [53] J. JACOD – *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 714, Springer, Berlin, (1979).
- [54] M. JEANBLANC, M. YOR & M. CHESNEY – « Mathematical Methods for Financial Markets ». Springer, Berlin, Heidelberg, New York (2009).
- [55] T. JEULIN & M. YOR – « Grossissement d’une filtration et semi-martingales : formules explicites », in *Séminaire de Probabilités, XII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1976/1977)*, Lecture Notes in Math., vol. 649, Springer, Berlin, p. 78–97, (1978).
- [56] T. JEULIN – *Semi-martingales et grossissement d’une filtration*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 833, Springer, Berlin, 1980.
- [57] Y. JIAO & H. PHAM – « Optimal investment with counterparty risk : a default-density model approach », *Finance and Stochastics* **15** (2011), no. 4, p. 725–753.
- [58] I. KARATZAS & S. SHREVE – « Brownian Motion and Stochastic Calculus », Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1988).
- [59] I. KARATZAS & S. SHREVE – « Methods of Mathematical Finance », Springer, Berlin, Heidelberg, New York (2001).
- [60] I. KARATZAS, J.P.LEHOCZKY, S.E.SHREVE & G.L.XU – « Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market », *SIAM J. Control Optim.*, 29(3) :702730 (1991).
- [61] I. KARATZAS, & I PITKOVSKY – « Anticipative portfolio optimization », *Advances in Applied probability*, 28, 1095-1122 (1996)
- [62] H. LELAND – « Corporate debt value, bond covenants and optimal capital structure », *Journal of Finance* **49** (1994), p. 1213–1252.
- [63] R. MERTON – « On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates », *Journal of Finance* **29** (1974), p. 449–470.
- [64] M. PIAZZESI – « Handbook of Financial Econometrics », chapter Affne Term Structure Models, pages 691-766. (2010).

- [65] C. STRICKER & M. YOR – « Calcul stochastique dépendant d'un paramètre », *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* **45** (1978), no. 2, p. 109–133.
- [66] M. KELLER-RESSEL, W. SCHACHERMAYER & J. TEICHMANN – « Affine processes are regular », *Probability Theory and Related Fields*, (151) :591-611, (2011).
- [67] M. KELLER-RESSEL, W. SCHACHERMAYER & J. TEICHMANN – « Regularity of affine processes on general state spaces », *Electronic Journal of Probability*, 43(18) :1-17, (2013).
- [68] H.KUNITA – « Stochastic flows and stochastic differential equations » , volume 24 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, (1997).
- [69] D. KRAMKOV & W. SCHACHERMAYER – « Necessary and sufficient conditions in the problem of optimal investment in incomplete markets », *Annals of Applied Probability*, 13(4) :15041516, (2003).
- [70] M.MUSIELA & T.ZARIPHOUPOULOU – « Portfolio choice under dynamic investment performance criteria », *Quantitative Finance*, 9(2) :161170, (2009).
- [71] M.MUSIELA & T.ZARIPHOUPOULOU – « Investment and valuation under backward and forward dynamic exponential utilities in a stochastic factor model », *In Advances in mathematical finance*, pages 303334. Birkhuser Boston, (2007).
- [72] OECD – « From Lessons to Principles for the use of Public-Private Partnerships », (2011), available at <http://www.oecd.org/gov/budgeting/48144872.pdf>.
- [73] H. PHAM– « Optimisation et Contrôle Stochastique Appliqués à la Finance », *Springer-Verlag*, (2007).
- [74] P. E. PROTTER – *Stochastic integration and differential equations*, Second edition, Springer-Verlag, Berlin, (2005).
- [75] F.P. RAMSEY– « A mathematical theory of savings », *The Economic Journal*, (38) :543 559, (1928).

- [76] L.C.G. ROGERS– « A mathematical theory of savings duality in constrained optimal investment and consumption problems : A synthesis. Working paper, Statistical Laboratory, Cambridge University. <http://www.statslab.cam.ac.uk/~chris/>, (2003).
- [77] Y. SANNIKOV– « A continuous-time version of the principal-agent problem », *Rev. Econ. Studies* 75 (2008) 957-984.
- [78] M. L. WEITZMAN– « Why the far-distant future should be discounted at its lowest possible rate », *Journal of Environmental Economics and Management*, 36(3) :201208, (November 1998).
- [79] M. L. WEITZMAN– « A review of the the stern review on the economics of climate change », *Journal of Economic Literature*, 45 :703724, (September 2007).